

广义始值问题存在性中的离散现象

吴建成 蔡日增

摘 要

本文讨论方程 $u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0$ 的广义始值问题存在性中的离散现象。文中证明了当 $p \neq 1, 3, 5, \dots$ 时, 问题的解不单是存在的, 也是唯一的; 当 $p = 1, 3, 5, \dots$ 时, 问题的唯一性被破坏了, 存在性也不成立。或者更确切地说, 在一定的相容条件下, 以及在方程的重特征流型 $x = 0$ 上补充指定适当的数据, 新的解才是存在唯一的。

关于退化方程的始值问题

$$\begin{cases} u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0, & p = \text{const} \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), & u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \end{cases} \quad (1)$$

Treves^[1] 和王光寅等^[2] 分别研究了它的唯一性和存在性中的离散现象, 得到其离散值均为 $p = 1, 3, 5, \dots$ 。

本文对始值问题(1)作一推广, 考虑如下的广义始值问题:

$$\begin{aligned} L_p u &= 0 \\ u(x, g(x)) &= \varphi_1(x) \\ \alpha(x, g(x)) u_x(x, g(x)) + \beta(x, g(x)) u_t(x, g(x)) &= \varphi_2^*(x) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $L_p = \partial_x^2 - x^2 \partial_t^2 + p \partial_t$ 。

假设 $\varphi_1(x), \varphi_2^*(x), g(x), \alpha(x, g(x)), \beta(x, g(x)) \in C^\infty$, 而且 $|g'(x)| < |x|$,

$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2} x^2。$$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), g(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 点具有无限阶零点} \quad (3)$$

在条件(3)之下, 本文将证明, 问题(2)当 $p \neq 1, 3, 5, \dots$ 时存在唯一的 C^∞ 解, 当 $p = 1, 3, 5, \dots$ 时, 唯一性破坏了, 存在性也不成立, 换言之, 只在某些相容条件下, 而且附加另外的条件, 解才是存在唯一的。

本文中, 我们仍沿用[1]中的记号, 记

$$X = \partial_x + x\partial_t, \quad Y = \partial_x - x\partial_t$$

于是, 算子 L_p 可以写成

$$L_p = YX + (p-1)\partial_t \quad (4)$$

而且有关系式

$$XL_p = L_{p-2}X, \quad L_pY = YL_{p-2} \quad (5)$$

易于验证, 对于一切 x 值, 只要

$$\frac{1}{\alpha(x, g(x))} \frac{g'(x)}{\beta(x, g(x))} \neq 0$$

广义始值问题(2)的求解, 可以化为始值问题

$$\begin{aligned} L_p u &= 0 \\ u(x, g(x)) &= \varphi_1(x) \\ u_t(x, g(x)) &= \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (6)$$

的求解, 其中

$$\varphi_2(x) = \frac{\varphi_2^*(x) - \alpha(x, g(x))\varphi_1'(x)}{\beta(x, g(x)) - \alpha(x, g(x))g'(x)}$$

由条件(3)可知

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), g(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 点具有无限阶零点} \quad (3_1)$$

我们主要对问题(6)进行讨论。为了书写的方便, 记

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \\ (A_p \varphi)(x) &= \left(\varphi_1'(x) + [x - g'(x)]\varphi_2(x), \frac{1}{x + g'(x)} \right. \\ &\quad \left. [(x - g'(x))\varphi_2'(x) + (p - g''(x))\varphi_2(x) + \varphi_1''(x)] \right) \end{aligned} \quad (7)$$

我们首先给出关于解的一个递推关系, 即下述引理:

引理 1 设 $g(x) \approx \frac{1}{2}x^2$, 如果 $p \neq 1$, 函数 $u(x, t)$ 是问题

$$\begin{cases} L_{p-2}u = 0 & t \geq g(x) \\ u(x, g(x)) = (A_p \varphi)_1(x) \\ u_t(x, g(x)) = (A_p \varphi)_2(x) \end{cases}$$

的解, 那么

$$v(x, t) = T_p u(x, t) = \frac{1}{1-p} \int_{g(x)}^t Y u d\tau + \varphi_1(x) \quad (t \geq g(x))$$

是广义始值问题(6)的解。

证明 由直接计算可知,

$$T_p u(x, t) |_{t=g(x)} = \varphi_1(x)$$

$$\partial_t T_p u(x, t) |_{t=g(x)} = \frac{1}{1-p} Y u |_{t=g(x)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-p} \left\{ \left[\varphi_1'(x) + (x-g(x)) \varphi_2'(x) \right]' - \left[(x-g(x)) \varphi_2'(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (p-g''(x)) \varphi_2(x) + \varphi_1''(x) \right] \right\} = \varphi_2(x) \end{aligned}$$

此外, 由于

$$\begin{aligned} &L_p T_p u(x, t) \\ &= \frac{1}{1-p} \left\{ \int_{g(x)}^t \partial_{xx} Y u d\tau - g'(x) (\partial_x Y u) |_{t=g(x)} - g''(x) Y u |_{t=g(x)} \right. \\ &\quad \left. - g'(x) \partial_x (Y u |_{t=g(x)}) - x^2 \partial_t Y u + p Y u \right\} + \varphi_1''(x) \\ &= \frac{1}{1-p} \left\{ \int_{g(x)}^t L_p Y u d\tau - g'(x) [(\partial_x Y u) |_{t=g(x)} + \partial_x (Y u |_{t=g(x)})] \right. \\ &\quad \left. - g''(x) Y u |_{t=g(x)} - x^2 (\partial_t Y u) |_{t=g(x)} + p Y u |_{t=g(x)} \right\} + \varphi_1''(x) \\ &= \frac{1}{1-p} \left\{ -g'(x) [(\partial_x Y u) |_{t=g(x)} + \partial_x (Y u |_{t=g(x)})] - g''(x) Y u |_{t=g(x)} \right. \\ &\quad \left. - x^2 (\partial_t Y u) |_{t=g(x)} + p Y u |_{t=g(x)} \right\} + \varphi_1''(x) \end{aligned}$$

利用方程 $L_{p-2} u = 0$ 以及(7)式, 不难推知,

$$L_p T_p u(x, t) = 0$$

引理证毕。

下面叙述并证明本文的主要结果。

定理 1 设 $p \neq 1, 3, 5, \dots$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $g(x)$ 满足条件(3₁), 那么, 广义始值问题(6)存在唯一的解 $u(x, t) \in C^\infty(\Omega)$, 这里 $\Omega = \{(x, t) \in R^2 | t \geq g(x)\}$ 。

证明 首先考虑 $p < 0$ 时的情形。设 $u_\varepsilon(x, t)$ 是下面严格双曲型方程的广义始值问题的解。

$$\begin{cases} u_{xx} - (x^2 + \varepsilon^2) u_{tt} + p u_t = 0 \\ u(x, g(x)) = \varphi_1(x) \\ u_t(x, g(x)) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

设 $x_0 > 0$ 是初始曲线上任一点的横坐标, 过点 $(x_0, g(x_0))$ 作曲线 Γ :

$$t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} + g(x_0)$$

它与初始曲线的另一交点的横坐标记为 $\tilde{x}_0$, 它们围成的区域记为 D , 过 $(x_0, g(x_0))$, $(\tilde{x}_0, g(\tilde{x}_0))$ 两点分别作特征线,

$$I_1 \quad \frac{dt}{dx} = -\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}, \quad t(x_0) = g(x_0),$$

$$I_2 \quad \frac{dt}{dx} = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}, \quad t(\tilde{x}_0) = g(\tilde{x}_0)$$

过曲线 Γ 的顶点 $(0, T)$ 作直线 $t = T$, 以 D_ε 记特征线和直线以及初始曲线所围成的区域。显然, $D_\varepsilon \supset D$, 对任意的 $t_0 \in [0, T]$, 作直线 $t = t_0$ 与 D_ε 的边界 ∂D_ε 相交, 记交点的横坐标分别为 $\tilde{x}_1, x_1$, 且 $\tilde{x}_1 < x_1$, 以 Ω_{t_0} 记区域

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t \leq t_0\} \cap D_\varepsilon$$

应用能量积分法, 容易得到下面的估计式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_1} [(u_{\varepsilon x})^2 + (x^2 + \varepsilon^2)(u_{\varepsilon t})^2] dx - p \iint_{\Omega_{t_0}} (u_{\varepsilon t})^2 dx dt \\ & \leq \int_{\tilde{x}_0}^{x_0} [\varphi_1'^2(x) + (x^2 + \varepsilon^2 - g'^2(x))\varphi_2^2(x)] dx \end{aligned} \quad (8)$$

由估计式(8)我们有

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(D)} \leq C_1,$$

其中 C_1 是与 ε 无关的常数。

注意到, $u_\varepsilon(x, t)$ 对 t 的各阶微商满足同一方程和类似的初始值, 而后者是一个关于 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 的导数的组合, 由于条件(3₁), 所以这些数据的绝对值均有与 ε 无关的上界。因而, 对于任意的正整数 m , 类似地有

$$\|u_\varepsilon\|_{H^m(D)} \leq C_m,$$

其中 C_m 是与 ε 无关的常数。由此可知, 存在 $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ 的收敛子序列 $\{u_{\varepsilon_j}(x, t)\}$, 它的极限 $u(x, t) \in C^\infty(D)$ 是问题(6)在 D 上的解。再由 $x_0 > 0$ 的任意性, 知 $u(x, t)$ 即为所求的解。由估计式(8), 知问题(6)的解是唯一的。

其次, 我们讨论 $p \geq 0$ 的情形。由于 $p \neq 1, 3, 5, \dots$, 所以只要利用引理 1, 便可得到结论。事实上, 令 $k = \left[\frac{p}{2} \right] + 1$, 则 $p - 2k < 0$, 利用条件(3₁), 由上述讨论知问题

$$\begin{cases} L_{p-2k} v_0 = 0 & t \geq g(x) \\ v_0(t, g(x)) = (A_{p-2k+2} A_{p-2k+4} \cdots A_{p-2} A_p \varphi)_1(x) \\ v_{0,t}(t, g(x)) = (A_{p-2k+2} A_{p-2k+4} \cdots A_{p-2} A_p \varphi)_2(x) \end{cases}$$

存在 C^∞ 解 $v_0(x, t)$ 。由引理 1 知

$$v_1(x, t) = \tilde{T}_{p-2k+2} v_0$$

是

$$\begin{cases} L_{p-2k+2} v_1 = 0 \\ v_1(x, g(x)) = A_{p-2k+4} A_{p-2k+6} \cdots A_{p-2} A_p \varphi)_1(x) \\ v_{1,t}(x, g(x)) = (A_{p-2k+4} A_{p-2k+6} \cdots A_{p-2} A_p \varphi)_2(x) \end{cases}$$

的解。由此递推下去, 令 $u = v_k = \widetilde{T}_p v_{k-1} = \widetilde{T}_p \widetilde{T}_{p-2} \cdots \widetilde{T}_{p-2k+2} v_0$, 这里 $p-2k+2j \neq 1, j=1, 2, \dots, k$ 。则 $u(x, t)$ 便是我们所要求的解。

定理 2 设 $k=0, 1, 2, \dots$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), g(x)$ 满足条件(3₁), $\psi(t) \in C^\infty[0, +\infty)$, 那么问题

$$\begin{cases} L_{2k+1}u = 0 \\ u(x, g(x)) = \varphi_1(x) \\ u_t(x, g(x)) = \varphi_2(x) \\ X^k u(0, t) = \psi(t) \end{cases} \quad (9_k)$$

存在唯一的 $C^\infty(\Omega)$ 解的充分必要条件是

$$\begin{cases} (A_1 A_3 \cdots A_{2k+1} \varphi)_1(x) \text{ 可唯一表示成某一函数 } \Phi^*(2g(x) + x^2) \\ \psi(t) \text{ 在 } t=0 \text{ 点具有无限阶零点} \end{cases} \quad (10_k)$$

这里 $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t \geq g(x)\}$ 。

证明 我们首先考虑 $k=0$ 的情形。设 $u(x, t)$ 是问题(9₀)的一个解, 并记 $v = Xu$, 那么, 我们有

$$\begin{cases} Yv = 0 \\ v(x, g(x)) = f(x) \end{cases} \quad (11)$$

这里 $f(x) = (A_1 \varphi)_1(x)$ 。

方程(11)的通解为 $v = \Phi(2t + x^2)$, 若 u 被唯一确定, 则 v 被唯一确定, $v = \Phi^*(2t + x^2)$ 。由 $v(x, g(x)) = \Phi^*(2g(x) + x^2) = f(x)$, 知 $f(x)$ 可被唯一确定为 $\Phi^*(2g(x) + x^2)$ 。

反之, 若 $f(x)$ 可唯一表示成 $\Phi^*(2g(x) + x^2)$, 则 $v = \Phi^*(2t + x^2)$ 被唯一确定, 在这样做的过程中, 区域 $t \geq g(x)$ 被抛物线 $t = \frac{1}{2}x^2$ 分成三个区域, 函数 $u(x, t)$ 分别满足

$$\begin{cases} Xu = \Phi^*(2t + x^2) & t \geq \frac{1}{2}x^2 \\ u(0, t) = \psi(t) \end{cases}$$

$$\text{和} \quad \begin{cases} Xu = \Phi^*(2t + x^2) & g(x) \leq t \leq \frac{1}{2}x^2 \\ u(x, g(x)) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

所以, $u(x, t)$ 必须取如下的形式

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi_1(x_0(t, x)) + \int_{x_0(t, x)}^x \Phi^*(2(t + \xi^2) - x^2) d\xi, & g(x) \leq t \leq \frac{1}{2}x^2, \\ \psi(t - \frac{1}{2}x^2) + \int_0^x \Phi^*(2(t + \xi^2) - x^2) d\xi, & t \geq \frac{1}{2}x^2, \end{cases} \quad (12)$$

这里 $x_0(t, x)$ 为方程组 $T = \frac{1}{2}X^2 - x^2/2 + t, T = g(X)$ 的 X 解, 由于 $u(x, t) \in C^\infty$, 再由条件(3)知 $\psi(t)$ 在 $t=0$ 有一个无限阶零点。反之, 易证在条件(10₀)下, (12) 是问题(9₀)的一个 C^∞ 解。

现在我们讨论 $k \geq 1$ 的情形。设 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} L_3 u = 0 \\ u(x, g(x)) = \varphi_1(x) \quad u_t(x, g(x)) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

则 Xu 满足

$$\begin{cases} L_1 Xu = 0 \\ Xu|_{t=g(x)} = \varphi_1'(x) + (x - g'(x))\varphi_2(x) = (A_3\varphi)_1(x) \\ (Xu)_t|_{t=g(x)} = u_{xt}(x, g(x)) + xu_{1t}(x, g(x)) \\ = \varphi_2'(x) + \frac{1}{x+g'(x)} [\varphi_1''(x) - 2g'(x)\varphi_3'(x) - (g''(x) - 3)\varphi_2(x)] \\ = (A_3\varphi)_2(x) \end{cases}$$

由此类推下去, 设 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} L_{2k+1} u = 0 \\ u(x, g(x)) = \varphi_1(x) \quad u_t(x, g(x)) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

则 $\tilde{u}(x, t) = X^k u$ 满足

$$\begin{cases} L_1 \tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}(x, g(x)) = (A_3 A_5 \cdots A_{2k+1} \varphi)_1(x) \\ \tilde{u}_t(x, g(x)) = (A_3 A_5 \cdots A_{2k+1} \varphi)_2(x) \end{cases}$$

从这里可得条件(10_k)的必要性。

余下的只需证明条件(10_k)的充分性。为此, 我们令

$$\psi_j(t) = X^j u(0, t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k+1$$

由 $L_{2k+1} u = 0$ 及关系式(5), 我们有

$$\begin{aligned} 2(k-j)\psi_j'(t) + \psi_{j+2}(t) &= 0 \quad t \geq g(x) \\ \psi_j(0) &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (13)$$

由于 $\psi_k(t) = \psi(t)$, 而 $X^k u$ 满足 $YX^{k+1}u = 0$ 及 $X^{k+1}u|_{t=g(x)} = (A_1 A_3 \cdots A_{2k+1} \varphi)_1(x)$ 。所以有

$$X^{k+1}u = \Phi^*(2t + x^2)$$

其中 Φ^* 由 $(A_1 A_3 \cdots A_{2k+1} \varphi)_1(x)$ 唯一表示, 于是

$$\psi_{k+1}(t) = X^{k+1}u|_{x=0} = \Phi^*(2t)$$

因而 $\psi_j(t)$, $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$, 可由(13)唯一确定。这样, 问题(9_k)的解必满足

$$\begin{cases} X^k u = \tilde{u} & t \geq \frac{1}{2} x^2 \\ X^j u(0, t) = \psi_j(t) & j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{cases} \quad (14)$$

和

$$\begin{aligned} X^k u &= \tilde{u} & g(x) \leq t \leq \frac{1}{2} x^2 \\ u(x, g(x)) &= \varphi_1(x) \\ X^j u(x, g(x)) &= (A_{(2k-j)+3} \cdots A_{2k-1} A_{2k+1} \varphi)_1(x) \\ && j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 如 $k=0$ 时所证那样, 函数 $u(x, t)$ 在由 $t = \frac{1}{2}x^2$ 所划分的三个区域中可唯一表示出来。并且, 由问题(14)与(15)所确定的 $u(x, t)$, 在条件(10_k)之下, 构成一个 $t \geq g(x)$ 中的 C^∞ 函数, 因而它就是我们所求的解。

参 考 文 献

- [1] Treves, F., Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem, proc. Amer. Math. Soc. 46(1974), 229—233.
- [2] 王光寅、麦明澈、陆柱家, 关于始值问题存在性中的离散现象, 中国科学, 8(1979), 752—758.

On Discrete Phenomena in Existence of The Generalized Initial Value Problem

Wu Jian-cheng Cai Ri-zeng

Abstract

This paper deals with discrete phenomena in existence and uniqueness of the generalized initial value problem as follows $u_{xx} - x^2 u_{tt} + pu_t = 0$, it is proved that if $p \neq 1, 3, 5, \dots$, the problem has unique solution and for $p = 1, 3, 5, \dots$, no uniqueness and existences can be found for the solution, which cease to hold.

In other words, the solution of the problem can only exist and be unique, when some compatibility conditions are satisfied and some additional data are given to the double Characteristic points (when $x=0$) of the equation.