

广义混合问题中的离散现象

成风 晔 蔡日增

摘 要

本文对非主型方程 $L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0$ 的广义混合问题的离散现象进行了讨论。文中证明了当 $p \neq 3, 7, 11, \dots$ 时, 问题的解是存在唯一的; 当 $p = 3, 7, 11, \dots$ 时, 唯一性破坏了, 存在性一般也不成立。或者更确切地说, 只有在适当的相容条件下, 问题的解才是存在的。

§ 1 引 言

关于 Cauchy 问题的离散现象, Treves, F.^[1] 研究了一个有趣的例子, 他证明了如下 Cauchy 问题

$$\begin{cases} L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

具有非平凡解的充分必要条件是 $p = 1, 3, 5, \dots$, 其中 $L_p = \partial_{xx} - x^2 \partial_{tt} + p \partial_t$ 。王光寅等^[2] 研究了方程 $L_p u = 0$ 的 Cauchy 问题及 Goursat 问题存在性中的离散现象。王传芳^[3] 对此方程的混合问题的存在性和唯一性的离散现象进行了讨论。

本文中, 我们将推广 [3] 中的结果。研究如下的广义混合问题

$$\begin{cases} L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0 & x \geq 0, t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \\ u\left(x, \frac{\beta}{2} x^2\right) = \varphi_1(x), u_t\left(x, \frac{\beta}{2} x^2\right) = \varphi_2(x) \\ u(0, t) = \mu(t) \end{cases} \quad (I)_p$$

其中 $0 \leq \beta < 1$ 。并证明了当 $p \neq 3, 7, 11, \dots$ 时, 问题 $(I)_p$ 的解是存在唯一的。而当 $p = 3, 7, 11, \dots$ 时唯一性被破坏了, 存在性一般也不成立。或者更确切的说, 只有在适当的相容条件下, 问题的 C^∞ 解才是存在的。

本文中, 我们仍沿用 [1] 的记号, 记

$$X = \partial_x + x \partial_t, Y = \partial_x - x \partial_t$$

于是算子 L_p 可以写成

$$L_p = YX + (p-1)\partial_t = XY + (p+1)\partial_t \quad (1.2)$$

且有关系式

$$XL_p = L_{p-2}X, \quad L_pY = YL_{p-2} \quad (1.3)$$

我们考察两个特殊的定解问题

$$\begin{cases} L_p u = 0 & x \geq 0, t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \\ u\left(x, \frac{\beta}{2} x^2\right) = \varphi_1(x), \quad u_t\left(x, \frac{\beta}{2} x^2\right) = \varphi_2(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad (II)_p$$

及

$$\begin{cases} L_p u = 0 & x \geq 0, t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \\ u\left(x, \frac{\beta}{2} x^2\right) = u_t\left(x, \frac{\beta}{2} x^2\right) = 0 \\ u(0, t) = \mu(t) \end{cases} \quad (III)_p$$

其中 $0 \leq \beta < 1$ 。为了叙述的方便, 在下面我们所讨论的数据 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\mu(t)$ 和解 $u(x, t)$ 都是 C^∞ 的, 我们假定函数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 及 $\mu(x)$ 在原点都有无穷阶零点。

令

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \\ B_p \varphi(x) &= \left[\varphi_1'(x) + (1-\beta)x\varphi_2(x), \varphi_2'(x) + \frac{1}{(\beta+1)x} \right. \\ &\quad \left. (\varphi_1''(x) - 2\beta x \varphi_2'(x) + (p-\beta)\varphi_2(x)) \right] \end{aligned}$$

§ 2 定 解 问 题 $(II)_p$

为了方便起见, 令

$$\begin{cases} \xi = x \\ \tau = t - \beta \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

于是问题 $(II)_p$ 变为

$$\begin{cases} A_p u = u_{\xi\xi} - 2\beta\xi u_{\xi\tau} + (\beta^2 - 1)\xi^2 u_{\tau\tau} + (p-\beta)u_\tau = 0 & \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ u(\xi, 0) = \varphi_1(\xi), \quad u_\tau(\xi, 0) = \varphi_2(\xi) \\ u(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (2.1)_p$$

其中 $A_p = \partial_{\xi\xi} - 2\beta\xi\partial_{\xi\tau} + (\beta^2 - 1)\xi^2\partial_{\tau\tau} + (p-\beta)\partial_\tau$ 。记

$$R = \partial_\xi - (\beta+1)\xi\partial_\tau, \quad Q = \partial_\xi - (\beta-1)\xi\partial_\tau$$

则有

$$A_p = RQ + (p-1)\partial_\tau \quad (2.2)$$

且有关系式

$$QA_p = A_{p-2}Q, \quad A_0R = PA_{p-2} \quad (2.3)$$

我们先给出关于解的两个递推关系:

引理 1 如果 $p \neq 1, 3$, 函数 $u(\xi, \tau)$ 是问题

$$\begin{aligned} A_{p-4}u &= 0 \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ u(\xi, 0) &= \psi_1(\xi), \quad u_\tau(\xi, 0) = \psi_2(\xi) \\ u(0, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

之解, 则 $v(\xi, \tau) = R^2u(\xi, \tau)$ 是问题 $(2.1)_p$ 之解。其中

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi) &= \frac{1}{(p-1)(p-3)} \int_0^\xi (\xi - \lambda) \left\{ (1 - \beta^2)[2\lambda^3\varphi_1'(\lambda) + (9-p)\lambda^2\varphi_2(\lambda)] \right. \\ &\quad \left. + 2(1 + \beta)[\lambda^2\varphi_1''(\lambda) + (4-p)\lambda\varphi_1'(\lambda)] + (p-4-\beta)(p-1)\varphi_1(\lambda) \right\} d\lambda \\ \Psi_2(\xi) &= \frac{2}{(p-1)(p-3)} \left[(1 - \beta)\xi^2\varphi_2(\xi) + \xi\varphi_1'(\xi) - \frac{p-1}{2}\varphi_1(\xi) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

证明 由(2.3), 我们有

$$A_p v = A_p R^2 u = R^2 A_{p-4} u = 0 \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0$$

由(2.4), 得

$$\begin{aligned} v &= R^2 u = u_{\xi\xi} - 2(\beta+1)\xi u_{\xi\tau} + (\beta+1)^2 \xi^2 u_{\tau\tau} - (\beta+1)u_\tau \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left[2u_{\xi\xi\tau} - 2(\beta+1)\xi u_{\xi\tau\tau} + (\beta+1)(p-5)u_{\tau\tau} \right] \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left[2(\beta-1)\xi u_{\xi\tau} - 2(\beta^2-1)\xi^2 u_{\tau\tau} + (p\beta-3\beta+3-p)u_\tau \right] \\ &= -2\xi u_{\xi\tau} + 2(\beta+1)\xi^2 u_{\tau\tau} - (p-3)u_\tau \\ v_\tau &= \partial_\tau R^2 u = \frac{1}{1-\beta} \left[2u_{\xi\tau} - 2(\beta+1)\xi u_{\xi\tau\tau} + (\beta+1)(p-5)u_{\tau\tau} \right] \\ &= \frac{1}{(1-\beta)^2} \left\{ 2(1+\beta)u_{\xi\xi\tau} - \frac{2}{\xi}u_{\xi\xi\xi} - \frac{2(p-4)(\beta+1)}{\xi}u_{\xi\tau} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p-1}{\xi^2}u_{\xi\xi} + \frac{(p-1)(p-4-\beta)}{\xi^2}u_\tau \right\} \end{aligned}$$

所以, 由(2.5)得

$$\begin{aligned} v(\xi, 0) &= \frac{1}{1-\beta} \left[2\Psi_1''(\xi) - 2(\beta+1)\xi\Psi_2'(\xi) + (\beta+1)(p-5)\Psi_2(\xi) \right] = \varphi_1(\xi) \\ v_\tau(\xi, 0) &= \frac{1}{(1-\beta)^2} \left\{ 2(1+\beta)\Psi_2''(\xi) - \frac{2}{\xi}\Psi_1'''(\xi) - \frac{2(p-4)(\beta+1)}{\xi}\Psi_2'(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{p-1}{\xi^2}\Psi_1''(\xi) + \frac{(p-1)(p-4-\beta)}{\xi^2}\Psi_2(\xi) \right\} = \varphi_2(\xi) \end{aligned}$$

而 $v(0, \tau) = -(p-3)u_\tau(0, \tau) = 0$ 。

引理 2 如果 $p \neq 3$, 问题

$$\begin{aligned} A_{p-4}u &= 0 \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ u(\xi, 0) &= u_\tau(\xi, 0) = 0 \\ u(0, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)_{p-4}$$

无非平凡解, 则问题 $(2.6)_p^*$ 也没有非平凡解。

证明 设 $u(\xi, \tau)$ 是问题 $(2.6)_p$ 之解, 则 $v(\xi, \tau) = Q^2u(\xi, \tau)$ 是问题 $(2.6)_{p-4}$ 之解。事实上, 由 (2.3) 得

$$A_{p-4}v = A_{p-4}Q^2u = Q^2A_pu = 0 \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0$$

$$\text{显然,} \quad v(\xi, 0) = v_\tau(\xi, 0) = 0$$

又由 $A_pu = 0$ 得

$$u_{\xi\xi}(0, \tau) + (p - \beta)u_\tau(0, \tau) = 0$$

于是, $u_{\xi\xi}(0, \tau) = 0$

$$\text{从而} \quad v(0, \tau) = u_{\xi\xi}(0, \tau) - (\beta - 1)u_\tau(0, \tau) = 0$$

由此可见, Q^2u 为 $(2.6)_{p-4}$ 的解, 又假定 $(2.6)_{p-4}$ 无平凡解, 故 $Q^2u = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad \partial_\xi Q^2u &= u_{\xi\xi\xi} - 2(\beta - 1)\xi u_{\xi\xi\tau} - 3(\beta - 1)u_{\xi\tau\tau} + 2(\beta - 1)^2\xi u_{\tau\tau} \\ &\quad + (\beta - 1)^2\xi^2 u_{\xi\tau\tau} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad u_{\xi\xi\xi}(0, \tau) - 3(\beta - 1)u_{\xi\tau\tau}(0, \tau) = 0 \quad (2.7)_1$$

又由 $A_pu = 0$ 对 ξ 求导得

$$u_{\xi\xi\xi} - 2\beta\xi u_{\xi\xi\tau} + (\beta^2 - 1)\xi^2 u_{\tau\tau\xi} + 2(\beta^2 - 1)\xi u_{\tau\tau\tau} + (p - 3\beta)u_{\xi\tau} = 0$$

$$\text{于是} \quad u_{\xi\xi\xi}(0, \tau) + (p - 3\beta)u_{\xi\tau}(0, \tau) = 0 \quad (2.7)_2$$

因 $p \neq 3$, 由 $(2.7)_1 - (2.7)_2$ 得 $u_{\tau\xi}(0, \tau) = 0$ 。从而

$$u_\xi(0, \tau) = \int_0^\tau u_{\tau\xi}(0, \tau) d\tau + u_\xi(0, 0) = 0$$

于是 $u(\xi, \tau)$ 满足

$$\begin{aligned} Q^2u &= 0 \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ u(\xi, 0) &= u_\tau(\xi, 0) = 0 \\ u(0, \tau) &= 0 \end{aligned}$$

令 $u_1 = Qu$, 则 u_1 满足

$$\begin{cases} Qu_1 = 0 & \xi \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1-\beta}{2}\xi^2 \\ u_1(\xi, 0) = Qu(\xi, 0) = 0 \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} Qu_1 = 0 & \xi \geq 0, \quad \tau \geq \frac{1-\beta}{2}\xi^2 \\ u_1(0, \tau) = Qu(0, \tau) = u_\xi(0, \tau) = 0 \end{cases}$$

* 这里 $(2.6)_p$ 表示 $(2.6)_{p-4}$ 中用 p 代替 $p-4$ 。

易知 $u_1(\xi, \tau) = 0 (\xi \geq 0, \tau \geq 0)$, 从而可知

$$u(\xi, \tau) = 0 \quad (\xi \geq 0, \tau \geq 0)$$

下面我们叙述并证明本节的主要结果:

定理 1 设 $p \equiv 4k+3, k \in \mathbb{Z}_+, \varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi) \in C^\infty$ 在原点都有无穷阶零点, 则问题 (2.1)_p 存在唯一解 $u(\xi, \tau) \in C^\infty(R_+^2)$, 其中 $R_+^2 = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2 | \xi \geq 0, \tau \geq 0\}$.

证明 先讨论 $p < 0$. 为此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $u_\varepsilon(\xi, \tau)$ 是下述严格双曲型方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - 2\beta(\xi + \varepsilon)u_{\xi\tau} + (\beta^2 - 1)(\xi + \varepsilon)^2 u_{\tau\tau} + (p - \beta)u_\tau = 0 \\ u(\xi, 0) = \varphi_1(\xi), \quad u_\tau(\xi, 0) = \varphi_2(\xi) \\ u(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

之解. 由能量积分法, 容易得到下述估计

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} \left[(1 - \beta^2)(\xi + \varepsilon)^2 u_{\tau\tau}^2 + u_{\xi\xi}^2 \right] d\xi - p \iint_{D_\varepsilon} u^2 d\xi d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} \left[(1 - \beta^2)(\xi + \varepsilon)^2 \varphi_2^2(\xi) + \varphi_1'^2(\xi) \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.8)$$

这里 $\xi_0 > 0$ 为任意常数, Ω_ε 是过点 $(\xi_0, 0)$ 的方程的特征线 $\frac{d\tau}{d\xi} = -(\beta + 1)(\xi + \varepsilon)$, 直线 $\tau = 0$ 和 $\xi = 0$ 所围成的闭区域, $\xi_1 > 0$ 是直线 $\tau = \tau_0 > 0$ 和 Ω_ε 的边界的一个交点的 ξ 坐标, $D_\varepsilon = \{(\xi, \tau) \in \Omega_\varepsilon | 0 \leq \tau \leq \tau_0\}$. 令

$$\Omega = \left\{ (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2 | \xi \geq 0, 0 \leq \tau \leq \frac{\beta+1}{2} (\xi_0^2 - \xi^2) \right\}$$

则 $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$. 因此, 由估计式 (2.8) 知 $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1$, 其中 C_1 是与 ε 无关的常数.

注意到, $u_\varepsilon(\xi, \tau)$ 对 τ 的各阶导数都满足同一方程和类似的初始数据以及在 $\xi = 0$ 上为零. 由于 $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$ 在原点都有无穷阶零点, 所以这些数据的绝对值均有与 ε 无关的上界. 因而, 对任意的正整数 m , 类似地有 $\|u_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} \leq C_m$, 其中 C_m 是与 ε 无关的常数. 由此, 我们利用标准化程序, 可知存在 $\{u_\varepsilon(\xi, \tau)\}$ 的收敛子序列 $\{u_{\varepsilon_i}(\xi, \tau)\}$, 它的极限函数 $u(\xi, \tau) \in C^\infty(\Omega)$ 是问题 (2.1)_p 在 Ω 上的解, 再由 $\xi_0 > 0$ 的任意性, 知 $u(\xi, \tau)$ 即为所求之解, 由估计式 (2.8) 知问题 (2.1)_p 的解是唯一的.

其次我们讨论 $p = 1$ 的情形, 即考虑混合问题 (2.1)*, 由 (2.2), $A_1 u = RQu = 0$, 令 $v = Qu$, 则有

$$\begin{cases} Rv = 0 & \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ v(\xi, 0) = \varphi_1'(\xi) - (\beta - 1)\xi\varphi_2(\xi) \equiv f(\xi) \end{cases}$$

解之, 得

$$v(\xi, \tau) = f\left(\sqrt{-\frac{2}{\beta+1}\tau + \xi^2}\right)$$

从而可得

这里 (2.1)₁ 表示 $p = 1$ 时的 (2.1)_p 式, 下同.

$$u(\xi, \tau) = \begin{cases} \int_0^\xi f\left(\sqrt{\frac{1}{\beta+1}\left[2\lambda^2+2\tau+(\beta-1)\xi^2\right]}\right)d\lambda & \xi \geq 0, \tau \geq \frac{1-\beta}{2}\xi^2 \\ \varphi_1\left(\sqrt{\frac{2\tau}{\beta-1}+\xi^2}\right) + \int_{\sqrt{\xi^2-\frac{2}{1-\beta}\tau}}^\xi f\left(\sqrt{\frac{1}{\beta+1}\left[2\lambda^2+2\tau+(\beta-1)\xi^2\right]}\right)d\lambda & \xi \geq 0, 0 \leq \tau \leq \frac{1-\beta}{2}\xi^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

容易验证, (2.9)式确是问题(2.1)₁的 C^∞ 解。

这样, 对于其它的 $p \geq 0$, 只要 $p \neq 3, 7, 11, \dots$, 利用引理 1 即知所求的解存在。

为证当 $p \geq 0$, $p \neq 3, 7, 11, \dots$ 时问题(2.1)_p 的解的唯一性, 我们令 $k = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$, 于是 $p - 4k < 0$, 由以上所证, 知问题(2.1)_{p-4k} 的解是唯一的, 由于 $p \neq 3, 7, 11, \dots$, 故 $p - 4i \neq 3$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$), 反复使用引理 2, 即知问题(2.1)_p 的解是唯一的。

由定理 1 立即可得

定理 2 设 $p \neq 3, 7, 11, \dots$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^\infty$ 在 $x = 0$ 都有无穷阶零点, 则问题(II)_p 存在唯一解 $u(x, t) \in C^\infty(\Sigma)$, 其中

$$\Sigma = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, t \geq \frac{\beta}{2}x^2 \right\}$$

而 $0 \leq \beta < 1$ 。

§ 3 定 解 问 题 (III)_p

同 § 2 一样, 我们令

$$\begin{cases} \xi = x \\ \tau = t - \frac{\beta}{2}x^2 \end{cases}$$

于是问题(III)_p 变为

$$\begin{cases} A_p u = u_{\xi\xi} - 2\beta\xi u_{\xi\tau} + (\beta^2 - 1)\xi^2 u_{\tau\tau} + (p - \beta)u_\tau = 0 & \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ u(\xi, 0) = u_\tau(\xi, 0) = 0 \\ u(0, \tau) = \mu(\tau) \end{cases} \quad (3.1)_p$$

我们先给出一个关于解的递推关系

引理 3、如果 $p \neq 3$, 函数 $u(\xi, \tau)$ 是问题

$$\begin{cases} A_{p-4} u = 0 & \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ u(\xi, 0) = 0, u_\tau(\xi, 0) = 0 \\ u(0, \tau) = \frac{1}{3-p} \int_0^\tau \mu(\lambda) d\lambda \end{cases} \quad (3.2)$$

之解, 则 $v(\xi, \tau) = R^2 u(\xi, \tau)$ 是问题 (3.1)_p 之解

证明 由关系式(2.3)得

$$A_p v = A_p R^2 u(\xi, \tau) = R^2 A_{p-4} u = 0 \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0$$

由引理 1 的证明过程知,

$$v(0, \tau) = (3-p)u_\tau(0, \tau) = \mu(\tau), \quad v(\xi, 0) = v_\tau(\xi, 0) = 0$$

现在来叙述并证明本节的主要结果

定理 3、设 $p \equiv 4k+3$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mu(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 在 $\tau=0$ 有无穷阶零点, 则问题 (3.1)_p 存在唯一解 $u(\xi, \tau) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ 。

证明 令 $Z(\xi, \tau) = u(\xi, \tau) - \mu(\tau)$, 则

$$\begin{cases} A_p Z = (1-\beta^2)\xi^2 \mu''(\tau) - (p-\beta)\mu'(\tau) \equiv F_p(\xi, \tau) & \xi \geq 0, \tau \geq 0 \\ z(\xi, 0) = z_\tau(\xi, 0) = 0 \\ z(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (3.3)_p$$

先考虑 $p < 0$ 的情形。令 $\varepsilon > 0$ 是任意实数, $Z_\varepsilon(\xi, \tau)$ 是如下严格双曲方程混合问题

$$\begin{cases} z_{\xi\xi} - 2\beta(\xi+\varepsilon)z_{\xi\tau} + (\beta^2-1)(\xi+\varepsilon)^2 z_{\tau\tau} + (p-\beta)z_\tau = F_p(\xi, \tau) \\ z(\xi, 0) = z_\tau(\xi, 0) = 0 \\ z(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0$$

之解, 利用能量积分法, 容易得到如下估计式

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} \left[(1-\beta^2)(\xi+\varepsilon)^2 z_{\tau\tau}^2 + z_{\xi\tau}^2 \right] d\xi - p \iint_{D_\varepsilon} z_{\tau\tau} F(\xi, \tau) d\xi d\tau \leq 0$$

其中 $\xi_0, \xi_1, \tau_0, D_\varepsilon, \Omega$ 均和定理 1 中引入的 $\xi_0, \xi_1, \tau_0, D_\varepsilon, \Omega$ 一样。于是

$$\begin{aligned} -p \iint_{D_\varepsilon} z_{\tau\tau}^2 d\xi d\tau &\leq -\frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} \left[(1-\beta^2)(\xi+\varepsilon)^2 z_{\tau\tau}^2 + z_{\xi\tau}^2 \right] d\xi - p \iint_{D_\varepsilon} z_{\tau\tau}^2 d\xi d\tau \\ &\leq \left| \iint_{D_\varepsilon} z_{\tau\tau} F_p(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \left(\iint_{D_\varepsilon} z_{\tau\tau}^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \left(\iint_{D_\varepsilon} F_p^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

即

$$\iint_{D_\varepsilon} z_{\tau\tau}^2 d\xi d\tau \leq \frac{1}{p^2} \iint_{D_\varepsilon} F_p^2(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

因此,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} \left[(1-\beta^2)(\xi+\varepsilon)^2 z_{\tau\tau}^2 + z_{\xi\tau}^2 \right] d\xi - p \iint_{D_\varepsilon} z_{\tau\tau}^2 d\xi d\tau \\ &\leq \frac{1}{|p|} \iint_{D_\varepsilon} F_p^2 d\xi d\tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

根据 (3.4) 式, 我们有

$$\|z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1$$

其中 C_1 是与 ε 无关的常数。

注意到 $z_{\tau\tau}$ 是以下混合问题

$$\begin{cases} z_{\xi\xi} - 2\beta(\xi+\varepsilon)z_{\xi\tau} + (\beta^2-1)(\xi+\varepsilon)^2 z_{\tau\tau} + (p-\beta)z_\tau = \partial_\tau F_p(\xi, \tau) \\ \quad \equiv (1-\beta^2)\xi^2 \mu'''(\tau) - (p-\beta)\mu''(\tau) \\ z(\xi, 0) = 0, z_\tau(\xi, 0) = \frac{F_p(\xi, 0)}{(\beta^2-1)(\xi+\varepsilon)^2} = 0 \\ z(0, \tau) = 0 \end{cases}$$

之解,于是,我们有

$$\|z_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2$$

类似地,对任意正整数 m , 我们有

$$\|z_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} \leq C_m$$

其中常数 C_m 与 ε 无关。因此,由标准化程序知, $\{Z_\varepsilon(\xi, \tau)\}$ 中存在一个收敛的子序列 $\{Z_{\varepsilon_0}(\xi, \tau)\}$ 。它的极限函数 $Z(\xi, \tau) \in C^\infty(\Omega)$ 是问题 $(3 \cdot 3)_p$ 在 Ω 上的解。由 $\varepsilon_0 > 0$ 的任意性即知 $Z(\xi, \tau)$ 是问题 $(3 \cdot 3)_p$ 之解。从而 $u(\xi, \tau) = Z(\xi, \tau) + \mu(\tau)$ 是问题 $(3 \cdot 1)_p$ 之解。

对于 $p \geq 0, p \neq 3, 7, 11, \dots$ 的情形,利用引理 3 即知所求的解存在,至于解的唯一性前面已证得。

由定理 3 的结论,我们得到

定理 4 如果 $p \neq 4k+3, k \in \mathbb{Z}_+, \mu(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 在 $t=0$ 有无穷阶零点,则问题 $(\text{III})_p$ 有唯一解 $u(x, t) \in C^\infty(\Sigma)$ 。

§ 4 定 解 问 题 $(I)_p$

引理 4 设 $f(x, t) \in C^\infty$, 且 $f(x, t)$ 在原点有无穷阶零点, $\psi(x)$ 及 $\varphi(x) \in C^\infty$ 在 $x=0$ 都有无穷阶零点,则由

$$\begin{aligned} Xu &= f & t \geq \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \\ u(0, t) &= \psi(t) \end{aligned} \quad (4 \cdot 1)$$

及

$$\begin{aligned} Xu &= f & -\frac{\beta}{2}x^2 \leq t \leq \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \\ u(x, \frac{\beta}{2}x^2) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (4 \cdot 2)$$

所确定的解 $u(x, t)$ 也是 C^∞ 的, 且在原点有无穷阶零点。

证明 事实上,由 (4·1)、(4·2) 所确定的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \Psi(t - \frac{x^2}{2}) + \int_0^x f(\xi, \frac{\xi^2}{2} + (t - \frac{x^2}{2})) d\xi & x \geq 0, t \geq \frac{x^2}{2} \\ \varphi(\sqrt{\frac{x^2 - 2t}{1-\beta}}) + \int_{\sqrt{\frac{x^2 - 2t}{1-\beta}}}^x f(\xi, \frac{\xi^2}{2} + (t - \frac{x^2}{2})) d\xi & x \geq 0, -\frac{\beta}{2}x^2 \leq t \leq \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

容易验证, $u(x, t) \in C^\infty(\Sigma)$, 且在原点有无穷阶零点。

下面叙述并证明本文的主要结果

定理 5 设 $p \neq 4k+3, k \in \mathbb{Z}_+, \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 及 $\mu(t) \in C^\infty$ 在原点都有无穷阶零点, 则问题 $(I)_p$ 存在唯一解 $u(x, t) \in C^\infty(\Sigma)$ 。

证明 由定理 2 和定理 4 即得所需的结论。

定理 6 设 $p = 4k+3, k \in \mathbb{Z}_+$, 则问题

$$\begin{cases} L_{4k+3}u = 0 & x \geq 0, t \geq \frac{\beta}{2}x^2 \\ u(x, \frac{\beta}{2}x^2) = u_t(x, \frac{\beta}{2}x^2) = 0 \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad (4 \cdot 3)_{4k+3}$$

恒有非零解。

证明 取

$$g(\eta) = \begin{cases} c - \frac{1}{\eta} & \eta > 0 \\ 0 & \eta \leq 0 \end{cases}$$

易证, $g(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ 。令

$$u(x, t) = y^{2k+1} \left[g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) \right] \quad (4 \cdot 4)$$

则 $u(x, t)$ 是问题 $(4 \cdot 3)_{4k+3}$ 的非零解。事实上显然, $u(x, t) \in C^\infty$, 由 $(1 \cdot 3)$ 式得

$$L_{4k+3}u = L_{4k+3}Y^{2k+1} \left[g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) \right] = Y^{2k+1}L_1 \left[g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) \right] = 0$$

又由于当 $t < \frac{x^2}{2}$ 时, $g(t - \frac{x^2}{2}) \equiv 0$, 所以, 当 $t < \frac{x^2}{2}$ 时, $u(x, t) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, 由 $u(x, t)$ 的连续性, 知当 $t \leq \frac{x^2}{2}$ 时, $u(x, t) = u_t(x, 0) = 0$ 。从而可知

$$u(x, \frac{\beta}{2}x^2) = u_t(x, \frac{\beta}{2}x^2) = 0$$

又因为

$$X^{2k+1} \left[g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) \right] = 0$$

所以

$$\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \left[g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) \right] \Big|_{x=0} = X^{2k+1} \left[g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) \right] \Big|_{x=0} = 0$$

于是

$$u(0, t) = \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \left[g\left(t - \frac{x^2}{2}\right) \right] \Big|_{x=0} = 0$$

定理 7 设 $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\mu(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 在原点有无穷阶零点, 则问题 $(1)_{4k+3}$ 存在 C^∞ 解的充分必要条件是

$$(-2)^{k+1}(2k+1)!!\mu^{(k+1)}(t) = (B_1B_3\cdots B_{4k+3}\varphi)_1 \left(\sqrt{\frac{2t}{\beta+1}} \right) \quad (4 \cdot 5)$$

证明 先证必要性, 设函数 $u(x, t)$ 是问题 $(1)_{4k+3}$ 之解。令

$$\Psi_j(t) = X^j u(0, t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2k+2$$

因为

$$\begin{aligned} 0 &= X^j L_{4k+3}u = L_{2(2k+1-j)+1} X^j u \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} X^j u - x^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} X^j u + [2(2k+1-j) + 1] \frac{\partial}{\partial t} X^j u \end{aligned}$$

• 9 •

所以

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X^j u \Big|_{x=0} + [2(2k+1-j) + 1] \Psi_j'(t) = 0$$

又因为

$$X^{j+2} u = X^2 X^j u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} X^j u + 2x \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} X^j u + x^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} X^j u + \frac{\partial}{\partial t} X^j u$$

所以

$$\Psi_{j+2}(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} X^j u \Big|_{x=0} + \Psi_j'(t)$$

于是, 有关系式

$$\begin{cases} \Psi_{j+2}(t) + 2(2k+1-j)\Psi_j'(t) = 0 & t \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, 2k \\ \Psi_j(0) = 0 & j = 0, 1, 2, \dots, 2k+2 \end{cases} \quad (4.6)$$

因为

$$\Psi_0(t) = u(0, t) = \mu(t)$$

所以, 由(4.6)得

$$\begin{aligned} \Psi_2(t) &= -2(2k+1)\mu'(t) \\ \Psi_4(t) &= 2^2(2k+1)(2k-1)\mu''(t) \\ \Psi_6(t) &= (-2)^3(2k+1)(2k-1)(2k-3)\mu'''(t) \\ &\dots\dots\dots \\ \Psi_{2n}(t) &= (-2)^n(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots(2k-2n+3)\mu^{(n)}(t) \\ &\dots\dots\dots \\ \Psi_{2k+2}(t) &= (-2)^{k+1}(2k+1)!!\mu^{(k+1)}(t) \\ 0 &= X^{2k+1} L_{4k+3} u = L_1 X^{2k+1} u = Y X^{2k+2} u, \quad \widetilde{v} = X^{2k+2} u, \end{aligned} \quad (4.7)$$

由于

则 $\widetilde{v}$ 满足

$$\begin{cases} \widetilde{v} = 0 & x \geq 0, t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \\ \widetilde{v}(x, \frac{\beta}{2} x^2) = X^{2k+2} u(x, \frac{\beta}{2} x^2) = (B_1 B_3 \cdots B_{4k+3} \varphi)_1(x) \end{cases}$$

所以

$$\widetilde{v}(x, t) = (B_1 B_3 \cdots B_{4k+3} \varphi)_1 \left(\sqrt{\frac{2t+x^2}{\beta+1}} \right)$$

因为

$$\widetilde{v}(0, t) = (B_1 B_3 \cdots B_{4k+3} \varphi)_1 \left(\sqrt{\frac{2t}{\beta+1}} \right)$$

另一方面,

$$\widetilde{v}(0, t) = \Psi_{2k+2}(t) = (-2)^{k+1}(2k+1)!!\mu^{(k+1)}(t)$$

从而可知(4.5)成立, 必要性得证。

再证充分性, 任取一个在 $t=0$ 具有无穷阶零点的 C^∞ 函数 $\Psi_{2k+1}(t)$ 。由 $\Psi_{2k+1}(t)$ 和

$$\Psi_{2k+2}(t) = (B_1 B_3 \cdots B_{4k+3} \varphi)_1 \left(\sqrt{\frac{2t}{\beta+1}} \right)$$

利用关系式(4.6)可唯一确定所有的 $\Psi_j (j=0, 1, 2, \dots, 2k)$ 。

令 $\tilde{u} = X^{2k+2}u$, 则 $\tilde{u}$ 可由问题

$$\begin{aligned} y \tilde{u} &= 0 \quad x \geq 0, \quad t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \\ \tilde{u}(x, \frac{\beta}{2} x^2) &= (B_1 B_3 \cdots B_{4k+3} \varphi)_1(x) \end{aligned} \quad (4 \cdot 8)$$

确定。于是, $(1)_{4k+3}$ 的解可由下列问题

$$\begin{aligned} X^{2k+2}u &= \tilde{u} \quad x \geq 0, \quad t \geq \frac{x^2}{2} \\ X^j u(0, t) &= \Psi^j(t) \quad j = 0, 1, 2, \cdots, 2k+1 \end{aligned} \quad (4 \cdot 9)$$

及

$$\begin{aligned} X^{2k+2}u &= \tilde{u} \quad x \geq 0, \quad \frac{x^2}{2} \geq t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \\ u(x, \frac{\beta}{2} x^2) &= \varphi_1(x) \\ X^j u(x, \frac{\beta}{2} x^2) &= (B_2 (2k+1-j) \cdots B_{4k+3} \varphi)_1(x) \quad j = 1, 2, \cdots, 2k+1 \end{aligned} \quad (4 \cdot 10)$$

确定。可以证明, 问题(4·8), (4·9)及(4·10)一定存在解 $u(x, t) \in C^\infty(\Sigma)$ 且当(4·5)满足时, $u(x, t)$ 是问题 $(1)_{4k+3}$ 的解。事实上, 利用引理 4, 可知(4·8)、(4·9)及(4·10)一定存在解 $u(x, t) \in C^\infty(\Sigma)$, 又当(4·5)成立时, 有

$$X^{2k+1} L_{4k+3} u = L_1 X^{2k+1} u = Y X^{2k+2} u = Y \tilde{u} = 0 \quad x \geq 0, \quad t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \quad (4 \cdot 11)$$

$$\begin{aligned} X^j L_{4k+3} u(0, t) &= L_{4k+3-2j} X^j u(0, t) \\ &= \partial_{xx} X^j u|_{x=0} + (4k+3-2j) \partial_t X^j u|_{x=0} \\ &= X^{j+2} u|_{x=0} + 2(2k+1-j) \partial_t X^j u|_{x=0} \\ &= \Psi_{j+2}(t) + 2(2k+1-j) \Psi_j'(t) = 0 \\ &\quad j = 0, 1, 2, \cdots, 2k \end{aligned} \quad (4 \cdot 12)$$

因为

$$\begin{aligned} \varphi_2'(x) &= u_{tx}(x, \frac{\beta}{2} x^2) + \beta x u_{tt}(x, \frac{\beta}{2} x^2) \\ \varphi_1''(x) - \beta \varphi_2(x) - \beta x \varphi_2'(x) &= u_{xx}(x, \frac{\beta}{2} x^2) + \beta x u_{xt}(x, \frac{\beta}{2} x^2) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} u_{tx}(x, \frac{\beta}{2} x^2) &= \varphi_2'(x) - \beta x u_{tt}(x, \frac{\beta}{2} x^2) \\ u_{xx}(x, \frac{\beta}{2} x^2) &= \beta^2 x^2 u_{tt}(x, \frac{\beta}{2} x^2) + \varphi_1''(x) - \beta \varphi_2(x) - 2\beta x \varphi_2'(x) \end{aligned} \quad (4 \cdot 13)$$

又因为

$$\begin{aligned} (B_{4k+1} B_{4k+3} \varphi)_1(x) &= X^2 u_{xx}(x, \frac{\beta}{2} x^2) \\ &= u_{xx}(x, \frac{\beta}{2} x^2) + 2x u_{xt}(x, \frac{\beta}{2} x^2) + x^2 u_{tt}(x, \frac{\beta}{2} x^2) + \varphi_2'(x) \end{aligned}$$

$$= u_{xx} \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = \frac{\beta}{2} x^2 + (1-2\beta)x^2 u_{tt} \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = \frac{\beta}{2} x^2 + 2x\varphi_2'(x) + \varphi_2(x) \quad (4 \cdot 14)$$

由(4·13)、(4·14)可得

$$\begin{aligned} x^2 u_{tt} \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) &= \frac{1}{(1-\beta)^2} \left[(B_{4k+1} B_{4k+3} \varphi)_1(x) - \varphi_1''(x) \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\beta)x\varphi_2'(x) - (1-\beta)\varphi_2(x) \right] \\ &= \frac{1}{1-\beta^2} \left[\varphi_1''(x) - 2\beta x\varphi_2'(x) + (4k+3-\beta)\varphi_2(x) \right] \\ u_{xx} \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) &= \beta^2 x^2 u_{tt} \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = \frac{\beta}{2} x^2 + \varphi_1''(x) - \beta\varphi_2(x) - 2\beta x\varphi_2'(x) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} L_{4k+3} u \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) &= u_{xx} \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) - x^2 u_{tt} \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) \\ &+ (4k+3)u_t \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = (\beta^2 - 1)x^2 u_{tt} + \varphi_1''(x) - \beta\varphi_2(x) \\ &- 2\beta x\varphi_2'(x) + (4k+3)\varphi_2(x) = 0 \end{aligned} \quad (4 \cdot 15)$$

类似地, 可以证得

$$X^j L_{4k+3} u \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 2k \quad (4 \cdot 16)$$

由(4·11)、(4·12)、(4·15)及(4·16)可知, $L_{4k+3} u(x, t)$ 满足方程

$$\begin{aligned} X^{2k+1} v &= 0 \quad x \geq 0, \quad t \geq \frac{\beta}{2} x^2 \\ X^j u \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) &= 0 \\ X^j u(0, t) &= 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2k \end{aligned}$$

故可知,

$$L_{4k+3} u = 0 \quad x \geq 0, \quad t \geq \frac{\beta}{2} x^2$$

又显然,

$$u \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = \varphi_1(x)$$

再由

$$Xu \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = \varphi_1'(x) + (1-\beta)x\varphi_2(x)$$

及

$$u_x \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = \varphi_1'(x) - \beta x\varphi_2(x)$$

得

$$u_t \left(x, \frac{\beta}{2} x^2 \right) = \varphi_2(x)$$

又由(4·5)和(4·6)知 $u(0, t) = \mu(t)$ 。从而可知 $u(x, t)$ 确是问题 (1)_{4k+3} 的 C^∞ 解。充分性得证。

主 要 参 考 文 献

- [1] Treves, F., Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem, proc. Amer. Math. Soc. 46(1974), 229—233.
- [2] 王光寅、麦明澈、陆柱家, 关于始值问题存在性中的离散现象, 中国科学, 8 (1979), 752—758.
- [3] 王传芳, 关于混合问题的离散现象, 数学年刊, 1 (3•4)1980, 469—474.

On Discrete phenomena in the Generalized Mixed problem

Cheng Feng-yang Cai Ri-zeng

Abstract

This paper deals with the discrete phenomena in the generalized mixed problem in the non-principal typical equation $u_{xx} - x^2 u_{tt} + pu_t = 0$. It has been proved that if $p \neq 3, 7, 11, \dots$, the problem has unique solution and for $p = 3, 7, 11, \dots$, no uniqueness and existence Can be found for the solution, More precisely, only under some compatible condition are satisfied, can the solution of the problem exist.