

驻波实验的数学解释

尹 伦

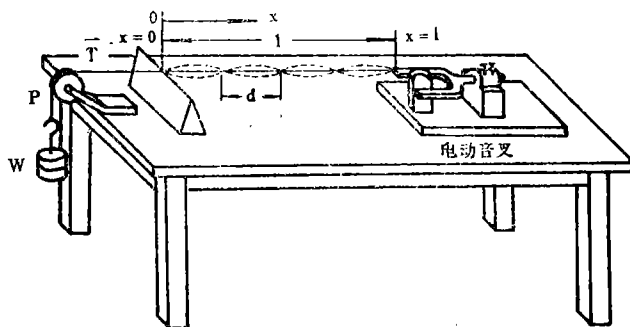
(基础课部)

一、引言

驻波实验非常清晰地显示了驻波现象,具有令人神往的直观效果。因此,不仅在物理学的理论中被作为驻波原理的重要例证,而且在物理实验中也有一定的实用价值^[1]。以前,虽然有了驻波的概念,但对驻波实验本身却没有恰当的解释^[2],因而不能说明驻波实验的稳定性、波长与弦长之间的关系以及振幅大小等问题。为此,本文提出驻波实验的一种数学模型,并得到这个定解问题的稳定解,从而比较合理地解释了驻波实验。本文所述的方法也可应用于共振的产生和消除等问题。

二、驻波实验的数学模型

1. 驻波实验简介^[3]



驻波实验装置图

如图所示,把弦线的一端系在电动音叉叉股末端的细杆上,另一端绕过滑轮P悬挂上重量为 W 的物体。当重量为 W 的物体保持静止时弦中的张力为 T ,并且有 $T=W$ 。弦的振动部分的长度为 l ,弦的线密度为 ρ 。弦的一端($x=0$)保持静止,另一端($x=l$)随音叉端点按规律 $A\cos\omega t$ 振动。 ω 为音叉振动的圆频率, A 为音叉端点振动的振幅。一般情况下, A 很小, $A\approx 10^{-2}\text{cm}$,使人的眼睛很难直接觉察音叉的振动。当调节弦长 l ,使它等于某些确定的量值时,我们就能观察到明显的稳定的驻波。而在其他的情况下,则观察不到明显的驻波,甚至有时几乎处于静止状态。

本文1984年9月11日收到。

2. 驻波实验数学模型的近似解

在驻波实验中, 由于振幅比较小, 因此可以把弦的振动的数学模型近似地表示为如下的定解问题, 即有界弦的强迫阻尼振动。

$$(I) \begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx} - 2nu_t & 0 < x < l, t > 0 & (1) \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x) & (2) \\ u|_{t=0} = \varphi_2(x) & (3) \\ u|_{x=0} = 0 & (4) \\ u|_{x=l} = A \cos \omega t & (5) \end{cases}$$

C 为波在弦上传播的速度, $C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 。 $2n$ 为阻尼系数 ($n > 0$), n 一般都比较小, $\frac{n}{c}$ 则更小。

由于阻尼的存在, (实际的振动系统都存在摩擦阻力)。初始条件(2)及(3)引起的有界弦的振动随着时间的增长而逐渐衰减, 因而当边界规律(5)作用充分长久后, 初始条件的影响实际上可以忽略不计。这样, 我们就可以从定解问题(I)转化为没有初始条件的定解问题(II)^[2]。

$$(II) \begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx} - 2nu_t & 0 < x < l, t > 0 & (6) \\ u|_{x=0} = 0 & (7) \\ u|_{x=l} = A \cos \omega t & (8) \end{cases}$$

于是定解问题的求解可以大为简化。

定解问题(II)的解为^[2]。

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{A \sin kx}{\sin kl} e^{i\omega t} \right] \quad (9)$$

在(9)中方括号内, $\frac{A \sin kx}{\sin kl} e^{i\omega t}$ 为复数, 它的实部记为 $\operatorname{Re} \left[\frac{A \sin kx}{\sin kl} e^{i\omega t} \right]$

而且

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{2n\omega}{c^2} \quad (10)$$

从(10)我们有,

$$k = \alpha + \beta i \quad (11)$$

k 是一个复数。由简单的计算可得:

$$\alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega^4 + 4n^2\omega^2}{2} + \omega^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4n^2}{\omega^2}} + 1} \quad (12)$$

再由 $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ 为波长。(12)又可以写成

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4n^2}{\omega^2}} + 1} \quad (13)$$

由于 $\frac{n}{\omega}$ 比较小,

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{\omega^2} \right) \quad (14)$$

又有

$$\beta = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4 + 4n^2\omega^2} - \omega^2}{2}} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{4n^2}{\omega^2}} - 1}{2}} \quad (15)$$

$$\beta \approx -\frac{n}{c} \quad (16)$$

我们令

$$X(x) = \frac{A \sin kx}{\sin kl} \quad (17)$$

由三角函数的尤拉公式, 可以把(17)写为:

$$X(x) = \frac{A(e^{kxi} - e^{-kxi})}{e^{kli} - e^{-kli}} = \frac{A(e^{\alpha xi - \beta x} - e^{-\alpha xi + \beta x})}{e^{\alpha l i - \beta l} - e^{-\alpha l i + \beta l}} \quad (18)$$

由于 $|\beta|$ 很小, 上式分子中的 $e^{-\beta x}$, $e^{\beta x}$ 及分母中的 $e^{-\beta l}$, $e^{\beta l}$ 可展开为级数, 并略去二阶小量, 则 $X(x)$ 的近似值为:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \frac{A[e^{\alpha xi}(1 - \beta x) - e^{-\alpha xi}(1 + \beta x)]}{e^{\alpha li}(1 - \beta l) - e^{-\alpha li}(1 + \beta l)} \\ &= \frac{A(\beta x \cos \alpha x - i \sin \alpha x)}{\beta l \cos \alpha l - i \sin \alpha l} \end{aligned}$$

把 $X_1(x)$ 改写成实部和虚部之和, 则

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \frac{A(\beta^2 x l \cos \alpha l \cos \alpha x + \sin \alpha l \sin \alpha x)}{\beta^2 l^2 \cos^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l} \\ &+ i \frac{A(\beta x \cos \alpha x \sin \alpha l - \beta l \sin \alpha x \cos \alpha l)}{\beta^2 l^2 \cos^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l} \quad (19) \end{aligned}$$

于是我们得到近似解

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \operatorname{Re}[X_1(x)e^{i\omega t}] \\ &= \frac{A(\beta^2 x l \cos \alpha l \cos \alpha x + \sin \alpha l \sin \alpha x)}{\beta^2 l^2 \cos^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l} \cos \omega t \\ &+ (-1) \frac{A(\beta x \cos \alpha x \sin \alpha l - \beta l \sin \alpha x \cos \alpha l)}{\beta^2 l^2 \cos^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l} \sin \omega t \quad (20) \end{aligned}$$

近似解(20)满足边界条件 $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = A \cos \omega t$ 。

3. 零级近似解

如果取零级近似, ($\beta = 0$) 由(13)和(15)得 $\alpha = \omega/c = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。我们得到

$$u_0(x, t) = \frac{l \sin \frac{2\pi x}{\lambda}}{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}} \cos \omega t \quad (21)$$

当 $\sin \frac{2\pi l}{\lambda} \neq 0$ 时, (21) 式虽然是驻波解, 且满足边界条件 $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = A \cos \omega t$ 。(21) 式也能说明驻波实验中波节、波腹的位置分布以及驻波中各点的周相关系, 但(21)式却有两个问题无法说明:

其一, 对于(21)式, 只要求 $\sin \frac{2\pi l}{\lambda} \neq 0$, 就有稳定的驻波, 即只要弦长 $l \neq k \cdot \frac{\lambda}{2}$, 就能形成驻波。但这与实验事实不符合, 因为实验证明, 只有当 l 调节到适当长度时, 才形成驻波。

其二, 对于(21)式, 当 $\sin \frac{2\pi l}{\lambda} = 0$ 时, 驻波的振幅将趋于无穷大, 即稳定的驻波并不存在。这与实验也不符合。(因为当 $\sin 2\pi l/\lambda = 0$ 时 $l = k \cdot \frac{\lambda}{2}$)。在实验中, 我们可以调节 l , 使 $l = k \cdot \frac{\lambda}{2}$, 这时并没有发现驻波实验的振幅趋向无穷大。

因此, 零级近似解(21), 作为驻波实验问题的解并不是很合适的。

4. 一级近似解

如果取近似解(20)(即一级近似解), 即与实验相符。现分别讨论如下:

1) 调节弦长 l , 当 $\cos \alpha l = 1$ 时, 则 $\sin \alpha l = 0$, 代入(20), 我们得到

$$u_2(x, t) = \frac{Ax}{l} \cos \alpha x \cos \omega t + \frac{A}{\beta l} \sin \alpha x \sin \omega t \quad (22)$$

(22) 也满足边界条件, (22) 是两项驻波解的叠加。

由于 A 很小 ($A \approx 2 \times 10^{-2} \text{cm}$), $\frac{Ax}{l}$ 比 $\left| \frac{A}{\beta l} \right|$ 小得多。因此(22)中的第一项可以略去, 得到:

$$u_2(x, t) \approx \frac{A}{\beta l} \sin \alpha x \sin \omega t \quad (23)$$

(23) 正是实验中观察到的最明显的稳定驻波。

由 $\sin \alpha l = 0$, 则

$$\alpha l = k\pi, \quad l = \frac{k\pi}{\alpha} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

把(13)中的 α 代入上式, 则得到:

$$l = \frac{k}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4n^2/\omega^2}}} \cdot \frac{\lambda}{2} \approx k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

这时, 弦长 l 由(24)决定。当弦长 l 满足(24)时, 就有最明显的稳定的驻波形成。

2) 从(23)式可以得到驻波的振幅为

$$R = \left| \frac{A}{\beta l} \right| \quad (25)$$

显然 $|\beta|$ 愈小, 振幅愈大。

由(16)式, 则

$$R \approx \frac{cA}{n l} \quad (26)$$

如果 $c = 50$ 米/秒, $A = 2 \times 10^{-2}$ 厘米, $l = 100$ 厘米, $n = 1$ 秒⁻¹ 从(26)式计算出振幅 $R \approx 1$ 厘米。

(25)和(26)表明了音叉端点的振幅与弦上驻波振幅之间的关系。

3) 由驻波解(23)式, 确定弦上静止点(波节)位置和振幅最大的点(波腹)的位置。(见图)

对于静止点有: $\sin \alpha x = 0$

$$\alpha x_k = k\pi$$

$$x_k = \frac{k}{\alpha} \pi \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

因为由(13)

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{1 + 4n^2/\omega^2}{2} + 1}$$

所以, 静止点的位置 x_k :

$$x_k = \frac{k\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + 4n^2/\omega^2}{2} + 1}} \approx \frac{k\lambda}{2} \quad (28)$$

相邻两波节之间的距离 d :

$$d = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + 4n^2/\omega^2}{2} + 1}} \approx \frac{\lambda}{2} \quad (29)$$

对于振幅最大的点, $|\sin \alpha x'| = 1$,

$$\alpha x'_k = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

振幅最大点的位置 x'_k , 则

$$x'_k = \frac{(2k+1)\lambda}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + 4n^2/\omega^2}{2} + 1}} \approx \frac{(2k+1)\lambda}{4} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

两相邻波腹之间的距离 d'

$$d' = x'_{k+1} - x'_k = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + 4n^2/\omega^2}{2} + 1}} \approx \frac{\lambda}{2} \quad (31)$$

4) 弦接近于静止的情况 当 $\cos \alpha l = 0$, $\sin \alpha l = \pm 1$, 于是近似解(20)

$$\text{变为:} \quad u_3(x, t) = A \sin \alpha x \cos \omega t - A \beta x \cos \alpha x \sin \omega t \quad (32a)$$

$$\text{或} \quad u_4(x, t) = -A \sin \alpha x \cos \omega t + A \beta x \cos \alpha x \sin \omega t \quad (32b)$$

(32a), (32b) 分别对应于 $\sin \alpha l = 1$ 与 $\sin \alpha l = -1$ 。

(32a) 及 (32b) 均满足边界条件, 而且均为两项驻波的叠加。因为 A 很小, $|\beta| x$ 也很小, 则 $A|\beta| x$ 更小。因此, 我们有

$$u_3(x, t) \approx 0 \quad (33)$$

这就是从表观上看,弦几乎处于静止状态的原因。

由 $|\sin \alpha| = 1$, 可以确定弦处于表观静止状态时的长度 l 。

$$\alpha l = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$l = \frac{(2k+1)\lambda}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4n^2}{\omega^2} + 1}} \approx \frac{(2k+1)\lambda}{4} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

由此可见,当弦长 l 满足(34)时,弦几乎处于静止状态。

5) 在其他情形下,即当 $\cos \alpha \neq 1$ 或 $\cos \alpha \neq 0$ 时,虽然弦上各点仍有稳定的振动规律,如近似解(20)所指出的那样,但却得不到最明显的稳定的驻波。这与我们在实验中观察到的结果是一致的。

参 考 文 献

- [1] 程守洵、江之永,《普通物理学》(第三版),人民教育出版社,1980。
- [2] A.H 吉洪诺夫、A.A 萨马尔斯基,黄克欧等译,《数学物理方程》,高等教育出版社,1956。
- [3] 无锡轻工业学院物理教研室,《物理实验讲义》。