第4卷 无锡轻工业学院学报 Vol. 4 No. 1
第1期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1985

德布罗意关系式的引出

刘 盛 耀

（基础课部）

德布罗意关系式在量子物理学发展中具有先导作用。本文探讨从不同途径引出此关系式，并作出比较。

1．最常见的引出方法

是从普朗克——爱因斯坦关于光的波——粒二象性关系式，$E=h\nu=\hbar\omega$，$\vec{P}=\frac{h}{\lambda}\vec{n}=\hbar\vec{k}$ 出发作类比，直接给出实物粒子的波——粒二象性关系式：

$$\left.\begin{array}{l} E=h\nu=\hbar\omega \\ \vec{P}=\dfrac{h}{\lambda}\vec{n}=\hbar\vec{k} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

这样引出的优点最为方便，符合德布罗意自己引出他的关系式的出发点，符合自然规律的对称性原理。

2．由变分相似性出发引出德布罗意关系式

这是一种含义精邃的方法。从经典力学和几何光学知道：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{莫培督原理为：} & \delta\int_A^B p\,dl=0\ \text{或}\ \delta S=0 \\ \text{费马原理为：} & \delta\int_A^B n\,dl=0 \end{array}\right| \qquad (2)$$

(2) 式中 P 和 S 分别为粒子的动量和作用量，n 为介质折射系数。

把 $\delta\int_A^B n\,dl=0$ 换写为：

$$\delta\int_A^B \frac{n\,dl}{\lambda}=0 \quad \text{或} \quad \delta\varphi=0 \qquad (3)$$

同时把 $\delta\int_A^B p\,dl=0$ 换写为哈密顿形式：

本文1984年5月28日收到

$$\delta\int_{t_0}^{t} L dt = 0 \text{ 或 } \delta S = 0 \tag{4}$$

3）式中λ为波长，φ为周相；（4）式中L和S分别为粒子的拉格朗日函数和作用量函数。假设自由粒子与平面波相对应，对自由粒子：

$L = \vec{P}\cdot\dot{\vec{\gamma}} - E$，由（4）式，作用量函数： $$S = \vec{P}\cdot\vec{\gamma} - Et \tag{5}$$

另一方面，对平面波：周相函数：

$$\varphi = \vec{k}\cdot\vec{\gamma} - \omega t \tag{6}$$

把(6)式乘以ħ与(5)式比较，即得(1)式。

(2)式的变分相似性早在1831年就为哈密顿发现，然而这极重要的相似性的深刻涵义在其后约一个世纪内也未能进一步阐明，原因显然是由于物理学的发展尚未提供充分的根据。直至普朗克——爱因斯坦关于光的波——粒二象性关系式被证实后，1923年德布罗意才大胆提出实物粒子的波——粒二象性。

3．把(2)式的变分相似性作进一步的类比

则：$\delta\int_A^B p dl = 0$ 还表明经典粒子运动的真实轨迹与等作用量面正交；另一方面，把几何光学作为波动光学的极限，$\delta\int_A^B n dl = 0$ 还表明光传播的实际波线与等相面正交。

对实物粒子，由(5)式和等作用量面方程：

$$S(\vec{r},t) = S_0,$$

$$\left.\begin{aligned} & ds = \frac{\partial s}{\partial t}dt + \frac{\partial s}{\partial \vec{\gamma}}d\vec{\gamma} = 0,\ \text{相速}u = \left|\frac{d\vec{\gamma}}{dt}\right| = \frac{\left|\frac{\partial s}{\partial t}\right|}{\left|\frac{\partial s}{\partial \vec{\gamma}}\right|} = \frac{E}{P} \\ & \text{群速}\vec{v} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

对光，在平面波的极限情形下，由(6)式和等相面方程：$\varphi(\vec{\gamma}, t) = \varphi_0$,

$$\left.\begin{aligned} & d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\gamma}}d\vec{\gamma} = 0,\ \text{相速}\ u = \left|\frac{d\vec{\gamma}}{dt}\right| = \frac{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|}{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\gamma}}\right|} = \frac{\omega}{k} \\ & \text{群速}\vec{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由(5),(6),(7),(8)式可建立如下对应关系：

$$\left.\begin{aligned}&S\longleftrightarrow\varphi\\&\vec{P}\longleftrightarrow\vec{k}\\&E\longleftrightarrow\omega\\&\vec{v}=\dot{\vec{\gamma}}=\frac{\partial E}{\partial\vec{P}}\longleftrightarrow\vec{v}=\dot{\vec{\gamma}}=\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

根据对应关系(9)式，由 $E(q,\dot{q}(p))\equiv H(q,p)=p\dot{q}-L$,对实物粒子把莫培督最小作用量原理写为哈密顿形式：

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t}(\vec{P}\cdot\dot{\vec{\gamma}}-H)dt=0\tag{10}$$

对光，把费马原理在形式上由光程度分写为周相变分：

$$\delta\varphi=\delta\int_{t_0}^{t}(\vec{k}\cdot\dot{\vec{\gamma}}-\omega)dt=0\tag{11}$$

把 (11) 式两端乘以 $\hbar$ 与 (10) 式比较，即得 (1) 式。

由变分相似性出发作对比引出德布罗意关系式的优点在于全面看清了粒子与波之间的对应物理量，这正是几何光学作为波动光学的短波极限与经典力学作为波动力学的短波极限——量子力学中的波动方程一含时间薛定谔方程，当从微观向宏观过渡 $\hbar\to0$ 的情况下就回到经典力学的哈密顿——雅可俾方程之间的深刻对应性的鲜明表现。这种对应性正是导致近代量子力学诞生的历史根源之一。如果仅着眼于 (5)、(6) 两式中 S 与 φ 相差普朗克常数 $\hbar$ 的量纲，这种方法也可以叫做量纲分析法。

4．德布罗意当年引出此关系式的出发点

对光成立的波——粒二象性关系：$E=\hbar\nu=h\omega$对实物粒子也成立，但他用了狭义相对论的全部公式。由狭义相对论，粒子在参照系$(\vec{\gamma},t)$中以速度$\vec{v}$沿一定方向的运动，可由：

$$\left.\begin{aligned}&\text{能量：}E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\\&\text{动量：}\vec{P}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad(\beta=\frac{v}{c})\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

确定。

为了发挥实物粒子波——粒二象性的观念，德布罗意以一个“波”与粒子相联系，复数波函数为：

$$\Psi(\vec{\gamma},t)=Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{\gamma}-\omega t)}\tag{13}$$

由于粒子的速度$v=|\vec{v}|$ 应与波的群速度相当，设想对光成立的关系式，$E=\hbar\omega$，对实物粒子也成立，就有：

$$\hbar\omega = E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14}$$

由(14)式可得：$\frac{d\omega}{dv} = \frac{m_0}{\hbar}\cdot v\cdot\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-3/2}$ (15)

因为波的群速度为：$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dv}\Big/\frac{dk}{dv}$，利用(15)式又得：

$$dk = \frac{m_0}{\hbar}\cdot\frac{dv}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{16}$$

设 $v=0$，时 $k=0$，利用 $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$，对(16)式积分，得 $\hbar k = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = P$，即 $\vec{P} = \hbar\vec{k}$ · 联合(14)式，得到实物粒子的波一粒二象性关系式(1)。

现在容易证明(1)式是相对论不变的。设在与粒子一起运动的“静止”参照系($\vec{\gamma}'$，t')中应有 $\vec{k'}=0$，$\vec{P'}=0$，$E'=m_0c^2$，若 $\hbar\omega = E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 对“静止”参照系也成立，就有 $\omega' = \frac{m_0c^2}{\hbar}$。

$$\text{由于}\quad \left.\begin{aligned} k_\mu &= (\vec{k},\ i\frac{\omega}{c}) \\ x_\mu &= (\vec{\gamma}, ict) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

因此，周相可以表示为两个四度矢的标量积，即在参照系变换时，周相 $\varphi = \vec{k}\cdot\vec{\gamma} - \omega t = k_\mu x_\mu =$ 不变量。于是，$\vec{k}\cdot\vec{\gamma} - \omega t = -\omega' t' = -\left(\frac{m_0c^2}{h}\right)t'$，代入洛伦兹变换

$$t' = \frac{t - (\vec{v}\cdot\vec{\gamma})/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

可得

$$\vec{k}\cdot\vec{\gamma} - \omega t = \frac{(m_0c^2/\hbar)[(\vec{v}\cdot\vec{\gamma})/c^2 - t]}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{18}$$

因(18)式对所有 $\vec{\gamma}$，t 都成立，就有：

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{(m_0c^2/\hbar)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \vec{k} &= \frac{(m_0\vec{v}/\hbar}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

把(19)式与(12)式作比较，重新得到式(1)。

在当代的自然科学领域中，任何一种真正的理论都必须和狭义相对论相符合。德布罗意关系式的相对论不变性，显示了量子论与相对论在本质上的深刻联系。从德布罗意引出实物粒子波——粒二象性关系式的过程看，特别明显地表明了他的理论与狭义相对论的一致性。

此外，德布罗意还对自由粒子求解哈密顿——雅可俾方程得作用量函数，从几何光学近似求解波动方程得周相函数，二者相比较，引出(1)式。但求解方程过程较繁。也还可由对应原理简便地引出(1)式。

最后必须着重指出，(1)式虽然是由特殊情形引出，但实验证明是普遍成立的。

参考献文

[1] L. debroglie,《*Nonlinear Wave Mechanics*》,1960

[2] 曾谨言编著，《量子力学》，上下册，1981.

[3] A'S.Kompaneyets,《*Acourse of Theoretical physics*》, Vol.I, 1978.