

无锡市少年宫天文台肋壳结构的有限元电算

范本隽 邹焕新 吴家骥

(机械系)

无锡市少年宫天文台屋顶为加肋、开孔薄壳结构(图1),我们用微机对该结构作了有限元电算。在不具备通用结构分析程序的情况下,编了适合于在微机上运行的加肋薄壳有限元程序。此程序也可用于分析单纯的刚架或薄壳。

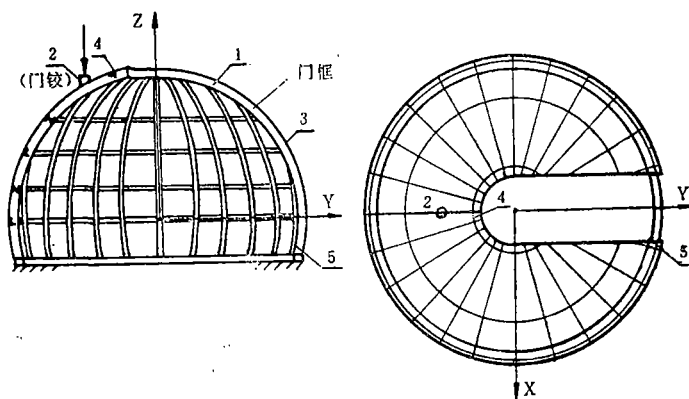


图1

一、单元及其连接

由于该壳体不管以何种方式划分总要出现多个三角形区域,所以使用三角形壳单元是自然的。为简单计,采用了三节点平板壳单元,它由常应变平面应力元与 $T-9$ 板弯曲元组合而成,是收敛的完备非协调元。使用简单单元不会使整体计算的精度受到明显影响,因为该结构的壳很薄(3mm),壳的刚度贡献相对于肋的刚度贡献而言是次要的。在局部坐标系中三角形平板壳单元的刚度矩阵 $[K_s]$ 见文献^[1]。

纵肋、水平肋和门框都是曲梁,将其离散为分段直梁。由于是在小曲率范围内,这样的近似处理所引起的误差是微小的。在局部坐标系中三维梁单元的刚度矩阵 $[K_b]$ 见文献^[1]。

现在考虑单元之间的连接。该结构的肋与壳是以图2所示方式焊接的。可认为壳单元与梁单元在节点处刚性连接,即,当结构受力而变形时,节点所在的横截面象一个刚体一样地

发生移动和转动。于是,壳单元的节点 i (它位于壳的中面上) 与同它连接的梁单元的节点 i' (它位于梁的横截面的形心) 之间有如下的位移协调关系 (见图 3):

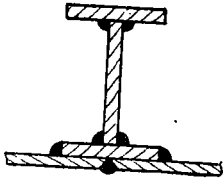


图 2

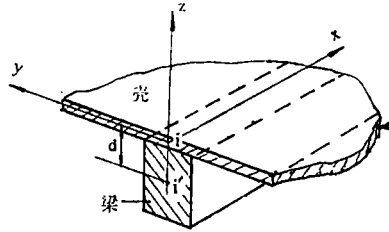


图 3

$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \\ \theta_{xi}' \\ \theta_{yi}' \\ \theta_{zi}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

简记为

$$\{\delta_i'\} = [\varphi] \{\delta_i\} \quad (2)$$

记梁单元 $i'j'$ 的节点位移向量为 $\{\delta'\}$, 壳中面上与 i', j' 相应的节点 i, j 的位移向量为 $\{\delta\}$,

$$\{\delta'\} = \begin{Bmatrix} \delta_i' \\ \delta_j' \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}$$

则

$$\{\delta'\} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} \{\delta\} = [\Phi] \{\delta\} \quad (3)$$

根据(3)式, 可把位于壳中面上的节点 i, j 等的自由度视为结构的独立自由度, 而把梁单元 $i'j'$ 在点 i', j' 的各自由度上的贡献变换到节点 i, j 的各自由度上去。变换的原则是单元位能不变。记变换前梁单元 $i'j'$ 的刚度矩阵和载荷向量为 $[K_B']$ 和 $\{R'\}$, 变换后其刚度矩阵和载荷向量为 $[K_B]$ 和 $\{R\}$ 。梁单元 $i'j'$ 的位能为

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta'\}^T [K_B'] \{\delta'\} - \{\delta'\}^T \{R'\} \quad (4)$$

变换后其位能表达式应为

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_B] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{R\} \quad (5)$$

将(3)式代入(4)式得

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\Phi]^T [K_B'] [\Phi] \{\delta\} - \{\delta\}^T [\Phi]^T \{R'\} \quad (6)$$

比较(5)、(6)两式的右端, 由 $\{\delta\}$ 的任意性, 得到单元刚度矩阵及载荷向量的变换式

$$\left. \begin{aligned} [K_B] &= [\Phi]^T [K_B'] [\Phi] \\ \{R\} &= [\Phi]^T \{R'\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这样处理后组装成的总刚度方程是以壳单元节点(位于壳的中面上)的自由度为未知量,并且在节点处梁与壳的位移协调关系自然满足。

当然,在将单元刚度矩阵和等效节点力向量向总刚度矩阵和总载荷向量迭加之前,还需要进行通常的由局部座标系 xyz 向总体座标系 XYZ 的座标变换,迭加进去的单元刚度矩阵和载荷向量分别是

$$\left. \begin{aligned} \text{平板壳单元:} \quad [\bar{K}_s] &= [T][K_s][T]^T \\ \{\bar{R}\} &= [T]\{R\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{梁单元:} \quad [\bar{K}_B] &= [T][\Phi]^T [K_B'] [\Phi][T]^T \\ \{\bar{R}\} &= [T][\Phi]^T \{R'\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 $[T]$ 为由局部座标系向总体座标系变换的座标变换矩阵,它由单元局部座标系的三根座标轴在总体座标系中的方向余弦构成。

二、用波前法扩大微机解题规模

我们用 HN-3070 机进行计算,该机每个终端可使用内存 64K 字节,因每个实型数占 4 字节,故最多可容纳 16K 个实型数。而本结构的节点不少于 92 个(因每两根肋的相交处必须作为节点),单元的节点号差为 8,即使按节约内存的变带宽一维贮存方式贮存总刚度矩阵,也须贮存 $(6 \times 92) \times [6 \times (8+1)] = 29.8K$ 个实型数,大大超过了机器的内存量。为克服这个障碍,采用波前法^[2]进行方程组的组集与求解。

波前法程序运行过程中,方程组的组集与消元是同时进行的。每将一个单元刚度矩阵组集进总刚度矩阵,立即检查是否有“某些节点”在以后各单元中不再出现,对这样的节点所对应的自由度立即进行消元,并把用以消元的方程记录到外存贮器中,腾出内存空间以接受新的方程。回代阶段则按相反的次序进行。这样,需要占据内存的仅仅是“活动的”节点所对应的方程,这些方程以上三角形形式贮存,称为“波阵”。本结构在恰当的单元编号下,波阵中的元素不超过 1.5K 个,从而使微机上运算成为可能。这是以颇为复杂的管理程序作为代价的。

恰当的单元编号是波前法发挥其效能的前提。所谓恰当,是使位于波阵内的每个节点能尽早地退出波阵。因此,单元编号时应将与同一节点有联系的所有单元集中在一起,如图 4 所示。图中 $\bigcirc$ 表示梁单元, $\square$ 表示壳单元。当完成对单元①、②、③组装后,节点 1 即可从波阵中退出来,新的节点(节点 5)进入波阵占据原来节点 1 占据的位置。以下类推。

用刚架和薄壳的考题^[3]分别对本程序进行了考核,计算值与理论值符合,从而证明程序正确。

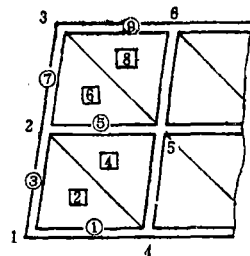


图 4

三、计算结果

无锡市少年宫天文台球形屋顶的设计载荷为自重与雪压力的联合作用,按规范规定无锡

地区雪压力在水平投影面上为 $S = 30 \text{ kg/m}^2$ 。由于单壳元在空间有各自的方位, 故每个壳单元上的雪压力强度需由计算得到。设某壳单元的座标变换矩阵为

$$[T] = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

则在该单元上的雪压力强度为 $p = Sn_3$, 单位面积上的分布力在三个局部座标轴上投影则为(图5)

$$p_x = -p \vec{k} \cdot \vec{e}_1 = -Sn_3 n_1$$

$$p_y = -p \vec{k} \cdot \vec{e}_2 = -Sn_3 n_2$$

$$p_z = -p \vec{k} \cdot \vec{e}_3 = -Sn_3 n_3$$

于是可按文^[1]提供的公式计算雪载荷的等效节点力, 例如节点1的等效节点力为(局部座标系中):

$$U_1 = -\frac{1}{3} p_x A,$$

$$V_1 = -\frac{1}{3} p_y A,$$

$$W_1 = -\frac{1}{3} p_z A,$$

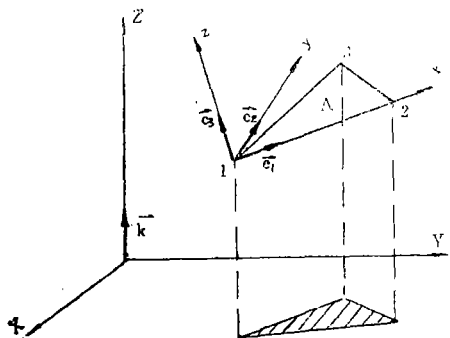


图5

$$M_{\theta x1} = -\frac{1}{24} (b_2 - b_3) p_z A,$$

$$M_{\theta y1} = -\frac{1}{24} (c_2 - c_3) p_z A$$

式中 A 为该壳单元的面积, 而

$$b_2 = y_3 - y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2, \quad c_2 = x_1 - x_3, \quad c_3 = x_2 - x_1$$

以上过程编成程序由计算机自动计算。

结构及载荷都是关于 YZ 平面对称的(见图1), 只需取其一半计算, 对位于对称平面内的各节点加以约束 $u = 0, \theta_y = 0, \theta_z = 0$ 。所取的半个结构离散为 293 个单元, 其中梁单元 145 个, 壳单元 148 个。弧形门自重及门上的雪重简化为作用于门铰处的竖向集中力。底部圈梁刚度较大, 简化为固定支座。计算结果如下:

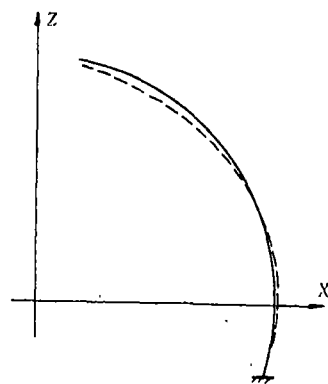
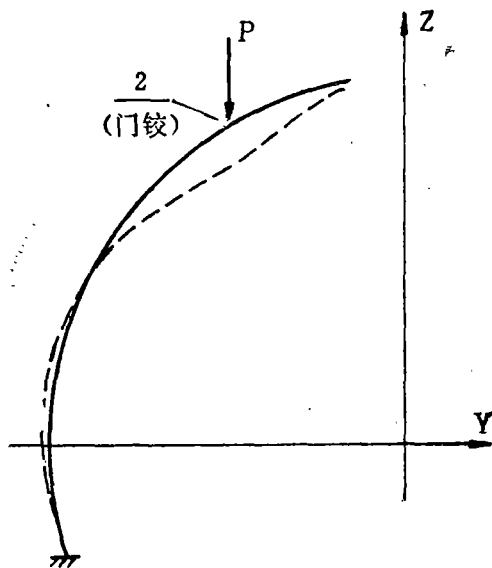
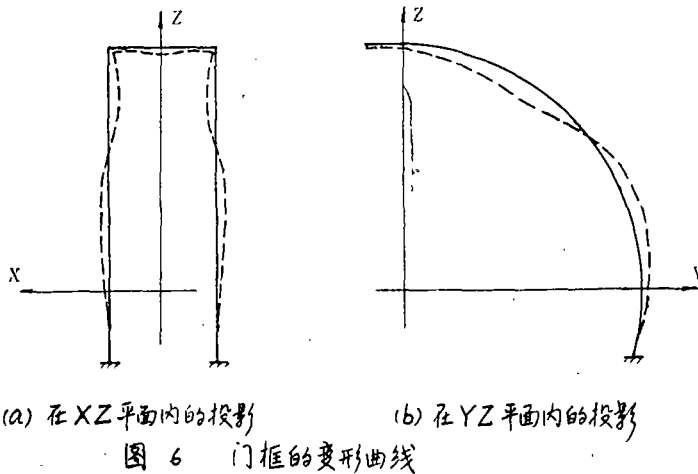
1. 变形情况

在自重与雪压力的联合作用下, 结构总的变形趋势是上半部略微内陷, 下半部略微外凸。几个特征部位的变形曲线如图6、7、8所示, 图中位移被放大了 50 倍, 结构尺寸较实际尺寸缩小了 70 倍。

结构的最大竖向位移发生在孔口边缘的点1处及门铰所在的点2处, 其值分别为 -0.0075 cm 及 -0.0072 cm 。最大水平位移发生在孔口边缘的点3处, 其 Y 向分量为 0.0050 cm , X 向分量为 0.0032 cm 。

2. 应力情况

I 形截面的肋中以门铰2位置的截面上内力为最大: 弯矩 $2671 \text{ kg} \cdot \text{cm}$, 轴力 84 kg 。由于截面大, 最大正应力仅 42 kg/cm^2 。L 形截面的肋中以点4位置的截面上内力为最大: 弯



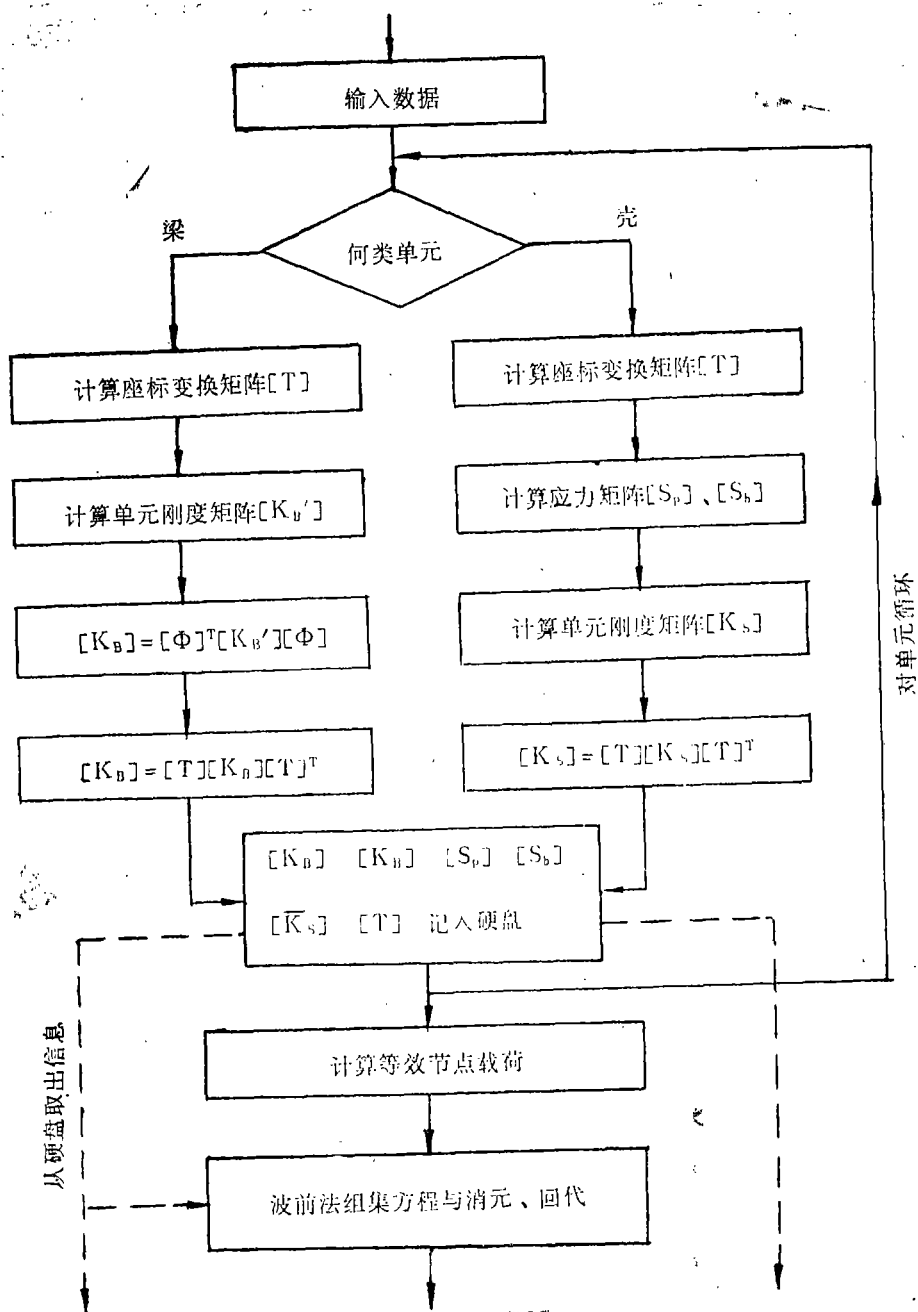
矩 $216\text{kg}\cdot\text{cm}$, 轴力 9kg 。最大正应力为 $81\text{kg}/\text{cm}^2$ 。

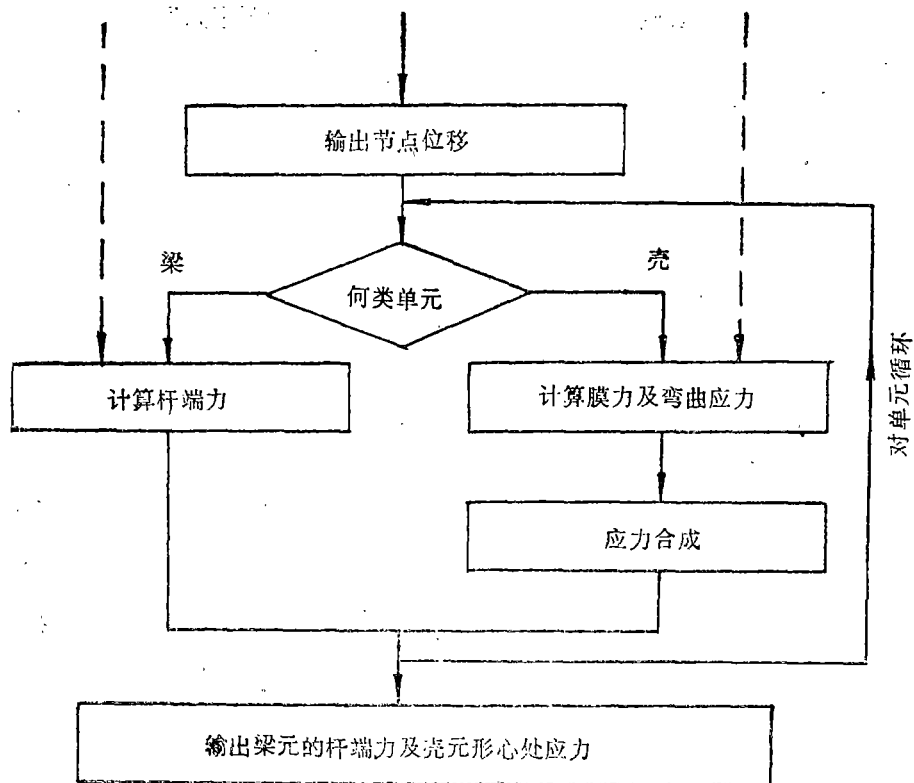
壳内应力最大值出现在与门铰2相接的单元, 该单元形心的主应力计算值为 $\sigma_1 = 1.8\text{kg}/\text{cm}^2$, $\sigma_2 = -40.6\text{kg}/\text{cm}^2$ 。其次为同门框根部5相接的单元, 应力属同样量级。如要进一步研究局部应力, 可将应力较大区域网格细分后利用整体计算得到的位移值作为边界条件作进一步计算。

图6、7、8所示的变形曲线表明计算结果基本上是合理的。例如图7表示该肋在集中力作用处有最大挠度, 图8表示无集中力作用的肋其变形比较均匀, 这都符合结构变形规律。变形和应力的计算值是小于实际值的, 这是由于: ①计算中没有考虑内饰物重量; ②单元连接处实际上不一定完全符合刚性连接假定; ③单元划分较粗(试验表明三角形平板壳单元常常是“过刚”的)。计算结果反映出总体变形比较均匀, 特别是门框的变形曲线较匀称地

分布在变形前位置的两侧,这说明结构布置大体合理。计算结果还表明可适当减小肋的截面以使结构更经济。

电算工作得到 89001 部队大力支持,谨致谢





参 考 文 献

- [1] 谢贻权、何福保主编,《弹性与塑性力学中的有限单元法》,机械工业出版社,1982
- [2] B.M.Irons, "A frontal solution program for finite element analysis", Int. J. Num. Meth. Eng. 2, 1970.
- [3] O.C.Zienkiewicz, "The finite element method", 3rd edition, 1977.
- [4] S.S.Rao, "The finite element method in engineering", Pergamon, 1982.

85021

微型计算机在电扇电机性能测试中的应用《无锡轻工业学院学报》

1985年, 第四卷, 第3期

关键词 电扇电机, 接口, 应用软件编写, 传感器, 超级隔离, 绝缘电阻, 功能电路。

摘要 本文叙述“微机控制电扇电机检测线”的设计和测量的基本原理。本文包括系统设计, 接口, 应用软件的编写和传感器。

作者: 冯伟, 周宝田, 周锡昌

85023

传递矩阵法与有限元方法的等效性及对传递矩阵法的修正《无锡轻工业学院学报》

1985年, 第四卷, 第3期

关键词 传递矩阵, 刚度矩阵, 质量矩阵, 等效性, 动力修正。

摘要 本文根据求解平面梁结构作横向振动的有限元公式, 推导了传递矩阵的表达式, 此表达式与常用的根据材料力学弯曲变形所得公式相同。从而证明了两方法在求解链式结构动力问题中是等效的并据此对传递矩阵法进行了修正, 使该方法不仅可以考虑剪切变形和弹性支承的影响, 而且可以考虑分布质量、分布回转效应及动力修正的影响。

作者: 徐宏

85022

无锡市少年宫天文台肋壳结构的有限元电算《无锡轻工业学院学报》

1985年, 第四卷, 第3期

关键词 有限元分析, 肋壳结构, 波前解

摘要 我们编制了用于肋壳结构分析的有限元程序。本文对梁单元的刚度矩阵和载荷向量进行了变换, 以实现各个梁单元的节点位移同与其连接的壳单元的节点位移的协调。采用波前法解方程组, 因此可用微机分析中等规模的结构。应用该程序对无锡少年宫天文台的肋壳结构进行了计算。

作者: 范本筠, 邹焕新, 吴家骥

85024

固定凸轮与连杆组合机构的设计《无锡轻工业学院学报》

1985年, 第四卷, 第3期

关键词 凸轮, 连杆, 组合机构, 压力角, 优化设计

摘要 本文简要介绍固定凸轮与连杆组合机构的工作原理与设计方法, 并比较全面地分析讨论了结构参数、摆动从动杆支点位置 and 驱动方案对压力角的影响, 从而为该机构的优化设计提供了依据。

作者: 赵治华

85023

THE EQUIVLENCE of TRANSFER MATRIX METHOD and FINITE ELEMENT METHOD and the CORRECTION to the TRANSFER MATRIX METHOD《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》, Vol.4, No. 3, 1985

KEYWORDS Transfer matrix, Stiffness matrix, Mass matrix, Equivalence, Dynamic correction.

ABSTRACT The transfer matrix formula is derived from the element stiffness and mass matrices of plane beam in the finite element method. It is just the same as the general formula derived by the material mechanics and mechanical vibration. Thus, the equivalence of two methods is proved in the vibration problems of chain structure. The transfer matrix method is corrected, which makes it possible to consider not only the influences of shear deformation and bearing elasticity but also the influences of distributed mass and gyroscopic moment of shaft and the dynamic correction.

Author: Xu Hong

85021

MICROCOMPUTER APPLICATION in FAN MOTOR PERFORMANCE MEASUREMENT《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》, Vol. 4, No.3, 1985

KEYWORDS Fan motor interface application software programming transducer superisolation insulation resistance function circuit.

ABSTRACT This paper describes the designing strategy and basic measuring principle of the "Microcomputer Controlled Electric Fan Motor Performance Measurement Line". It contains system design, interface, application software programming and the design of the transducers.

Author: Feng Wei, Zhou Baotian, Zhou Xichang

85024

THE DESIGN for COMBINED MECHANISM of FIXED CAM and LINKAGE《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》, Vol.4, No.3, 1985

KEYWORDS Cam. Linkage, Combined mechanism, Pressure angle, optimum design.

ABSTRACT The paper shows the principle and design method of combined mechanism of fixed cam and linkage, and the influence of the parameters, the support point of swing linkage and with the driving form on the pressure angle discussed. Therefore, a reliable method has been dedicated for optimum design of this mechanism.

Author: Zhao Zhikua

85022

FINITE ELEMENT ANALYSIS of the RIBBED SHELL of the ASTRONOMICAL OBSERVATORY of WUXI CHILDREN'S PALACE《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》, Vol.4, No.3, 1985

KEYWORDS Finite element analysis, ribbed shell, Wavefront solution

ABSTRACT A finite element program designed for the stress analysis of ribbed shells is presented. In this paper, the stiffness matrices and load vectors of the beam elements have been transformed so as to get the nodal displacements of each beam element compatible with those of the adjoining shell elements. The wavefront solution method has been adopted to solve the system of equation, thus the microcomputer may be used to analyze a medium-scale structure. As an example of its applications, the ribbed shell of the astronomical observatory of wuxi children's palace is computed in the way.

Author: Fan Benjun, Zou Huanxin, Wu Jiaji