

论二维圆形重力—表面张力水面发散 波的物理性质

蔡 颀

(物理教研室)

水面波图象通常在基本物理教程中广泛用以说明波动的原理,但要全面论述各种水波的物理性质是一项颇为艰巨的任务,目前的一些有关著作如吴望一《流体力学》、盛振邦《流体力学》F·S·克劳福德《波动学》^[1,2,3]等主要介绍了重力平面波的物理性质,本文以二维圆形重力—表面张力发散波为模式作进一步的探讨

一、理想流体的模型和水面波的动力学机制

水波的产生是一个复杂的物理过程,它既与水的具体性质有关,也涉及产生水波的动力学机制,作为实际情况的近似,我们可以忽略一些次要因素而提出如下假设:

1. 理想不可压缩流体的无旋运动

理想不可压缩流体的无旋运动,其物理性质的数学表述可概括为

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad (2)$$

其中 $\vec{v}$ 表示流体质点的速度矢量。由于运动是无旋的,因此根据(2)式可引入速度势函数 φ , 使得

$$\vec{v} = \nabla \varphi \quad (3)$$

将(3)式代入连续性方程(1)后得到在流场中 φ 应满足的基本方程

$$\Delta \varphi = 0 \text{ (拉普拉斯方程)}$$

2. 重力—表面张力引起的小振幅圆形简谐波

从动力学角度考虑,在一般情况下,水面波是由重力和表面张力共同作为恢复力而产生的,本文以下讨论的就是由此而引起的小振幅圆形水面简谐波,当这种波存在时,其振幅与波长相比较是一阶微量,这个假定使得在数学处理中有可能忽略一系列高阶微量而得到有意义的结果。

二、二维圆形重力—表面张力水面简谐波 的定解问题及发散波解的形式

与石头扔进水池所激起的水面一圈圈逐渐扩展的圆形波纹相比拟,这种理想化的水面波模式的主要物理性质可根据相应定解问题的解得到,采用柱坐标系 (r, θ, z) 进行讨论,由对称性知,流场中速度势 φ 应与 θ 无关。

为了列出完整的定解条件,首先要解决表面张力的贡献问题。表面张力是流体表面各微团之间的相互牵引力,由于表面张力的作用,使得流体表面就象一张拉紧的膜,当波动存在时,波面的曲率使得表面张力的作用贡献一个向下的压力,对于小振幅的圆形简谐波,如图1所示,设波面方程为 $\zeta = E(r) \sin(kr - \omega t)$ (ζ 为波面质点的垂直位移, ω 为角频率, k 为波数),而张力的铅直分量为 $T_0 \frac{\partial \zeta}{\partial r}$ (T_0 为张力系数),则当 r 较大时表面张力对向下压力的贡献为

$$P_0' = T_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} = T_0 k^2 \zeta \quad (4)$$

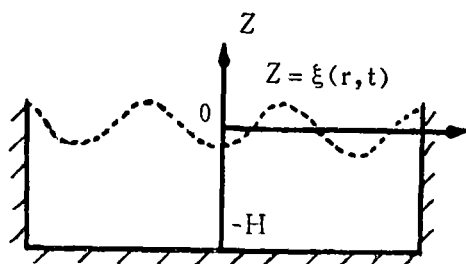


图1 简谐波波面图

上式的推导中已将包含 $\frac{dE}{dr}$ 和 $\frac{d^2E}{dr^2}$ 的项作为高阶微量略去。

可以认为,表面张力的影响反映在小振幅波浪运动自由表面的边界条件上,这时,在自由表面上有

$$压力 P = P_0 (\text{大气压力}) + P_0' = P_0 + T_0 K^2 \zeta \quad (5)$$

将(5)式代入理想流体无旋运动动力学基本方程的

拉格朗日积分式得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta + \frac{P_0 + T_0 K^2 \zeta}{\rho} = 0$$

其中 ρ 为水的密度,将常数项 $\frac{P_0}{\rho}$ 并入 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 中,得到

$$\zeta = \frac{-1}{\left(g + \frac{T_0 K^2}{\rho}\right)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (6)$$

(6)式 t 偏导,可得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{\left(g + \frac{T_0 K^2}{\rho}\right)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

对于小振幅波,忽略了高阶微量后近似有

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \text{ 因此有}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{-1}{\left(g + \frac{T_0 K^2}{\rho}\right)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

综上所述, 二维圆形重力—表面张力水面简谐波的定解问题概括如下

基本方程:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

边界条件: 在池壁
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

在池底 $z = -H$ 处
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

在自由表面 $z = 0$ 处

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{-1}{\left(g + \frac{T_0 K^2}{\rho}\right)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (9)$$

初始条件: 在 $t = 0, z = 0$ 时

$$\varphi = F(r), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(r)$$

由于我们感兴趣的是发散波解的形式所体现的波浪运动的物理特性, 因此求解过程不必涉及初始条件的具体形式和池壁的影响。

设 φ 具有分离形式的特解

$$\varphi = T(t)R(r)Z(z) \quad (10)$$

将(10)式代入边界条件(9)式后分离变量, 得 $z = 0$ 时 $T'' + \omega^2 T = 0$ (ω 为常数)

解得
$$T(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \quad (11)$$

再将(10)式代入基本方程(7)式, 分离得到

$$\begin{cases} Z'' - K^2 Z = 0 (K \text{ 为常数}) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + K^2 R = 0 \end{cases} \quad (13)$$

解(12)(13)式, 分别得到

$$\begin{cases} Z(z) = B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} R(r) = C_1 H_0^{(1)}(Kr) + C_2 H_0^{(2)}(Kr) \end{cases} \quad (15)$$

其中 $H_0^{(1)}(kr)$ 、 $H_0^{(2)}(kr)$ 为零阶 Harkel 函数

概括(11)(14)(15)式可得到 φ 的解的形式为

$$\varphi = \begin{Bmatrix} e^{kz} \\ e^{-kz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_0^{(1)}(Kr) \\ H_0^{(2)}(Kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{Bmatrix}$$

保留发散波解 $H_0^{(1)}(Kr)e^{-i\omega t}$ 或 $H_0^{(2)}(Kr)e^{i\omega t}$, 并考虑到在 r 较大时, Harkel 函数有渐近式^[4]

$$H_0^{(1)}(Kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} e^{i(Kr - \frac{\pi}{4})}$$

于是得到

$$\varphi = (Ae^{Kz} + Be^{-Kz}) \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} \cos(Kr - \omega t - \frac{\pi}{4}) \quad (16)$$

再将(16)式代入边界条件(8)式, 得到 $z = -H$ 时

$$Ae^{-KH} = Be^{KH}$$

今

$$\frac{C}{2} = Ae^{-KH} = Be^{KH}, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} A = \frac{C}{2} e^{KH} \\ B = \frac{C}{2} e^{-KH} \end{cases}$$

$$\varphi = C \cos hK(z+H) \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} \cos(Kr - \omega t - \frac{\pi}{4}) \quad (17)$$

其中 C 为常数, $\cos h$ 为双曲余弦函数

根据

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{ 及 } u = \int_0^t v_r dt \\ v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ 及 } w = \int_0^t v_z dt \end{cases}$$

在忽略高阶微量后可得到流体质点在水平径向及铅直方向位移 u 、 w 的表达式

$$\begin{cases} u = -C \frac{K}{\omega} \cosh hK(z+H) \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} \cos(Kr - \omega t - \frac{\pi}{4}) \\ w = -C \frac{K}{\omega} \sinh hK(z+H) \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} \sin(Kr - \omega t - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} u = -C \frac{K}{\omega} \cosh hK(z+H) \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} \cos(Kr - \omega t - \frac{\pi}{4}) \\ w = -C \frac{K}{\omega} \sinh hK(z+H) \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} \sin(Kr - \omega t - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad (19)$$

三、结 论

上述流体质点速度势及位移的表达式(17)(18)(19)式反映出二维圆形重力—表面张力水面发散波具有一些独特的物理性质。

1. 波振幅与 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 成正比地衰减

在理想的条件下, 平面波的振幅在传播过程中是保持不变的, 而(18)(19)式表明, 圆形柱面波的振幅随着距离的增大与 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 成正比地衰减, 由于波能流密度与振幅平方成正比, 因此这个结论不难从能量守恒的角度得到解释。

2. 流体质点的运动轨迹是顺进椭圆

虽然一般基本物理教程中都引用水波实验的例子来说明波动原理, 但是对于水波中质点

的运动规律却很少触及,于是难免有些读者凭着模糊的直觉以为水面波是一种横波,它经过的地方,水中质点一定是作上运动的,实际上这只是一误解。

根据(18)(19)两式可知,对于给定的流体质点来说, r 、 z 为常数,它的运动规律可以表示为

$$\begin{cases} u(t) = \pm A_0 \cos(\omega t - \psi) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} w(t) = \pm B_0 \sin(\omega t - \psi) \end{cases} \quad (21)$$

其中 $A_0 \cdot B_0$ 为大于零的常数,从两式中消去 t ,

得
$$\frac{u^2}{A_0^2} + \frac{w^2}{B_0^2} = 1$$

这显然是椭圆轨迹方程,当水极深时(即 $H \rightarrow \infty$),容易证明有 $\cos hK(z+H) \approx \sinh hK(z+H)$,因此 $A_0 = B_0$,这时质点的运动轨迹是圆,

此外,根据(20)(21)两式的符号随 t 的变化还可判断出质点沿椭圆运动的绕行方向,如图2所示,假定某时刻有 $\omega t_0 - \psi = 0$,质点位于 P_0 点(或 P_0' 点),经过很短时间后,则 $\omega t - \psi > 0$,由(20)(21)式知这时 $u < 0, w > 0$ (或 $u > 0, w < 0$),质点运动至 P_1 点(或 P_1' 点),这表明质点在作顺进椭圆运动,即流体质点的运动方向在波峰处与波前进方向相同,而在波谷处则相反(图2)。有趣的是,地震学中经常研究的发生在弹性固体表面的瑞利(Rayleigh)面波中质点的运动轨迹也是椭圆,但只不过是一种方向相反的所谓逆进椭圆。

3. 波的振幅在水面以下随深度迅速衰减

无疑,水面波不可能仅仅存在于表面这样一个几何面上,但是,根据(18)(19)两式中 $\cos hK(z+H)$ 和 $\sin hK(z+H)$ 函数的特点可知,当 $z < 0$ 时, u 、 w 的振幅随深度的增加而迅速衰减,关于深水波的计算表明,在水面以下一个波长深度处水质点的振幅已衰减为水面的 $1/500$,因此水面波的确是一种名符其实的“面波”,它只局限于水面以下一个不大的表面层内。

应该指出, u 、 w 的振幅随深度衰减的规律有所不同,由于底部边界条件影响, w 振幅衰减的速率更快一些,这意味着当深度增加时,水质点运动的椭圆不仅变小,而且被压扁,当 $y = -H$ 时,由于 $w = 0, u \neq 0$,水滴只沿与底面平行的方向振动(图3)。

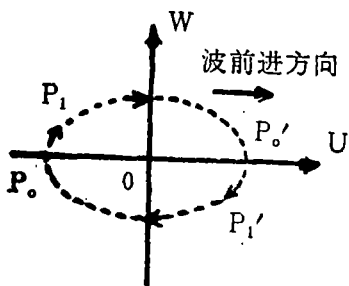


图2 流体质点运动轨迹示意图

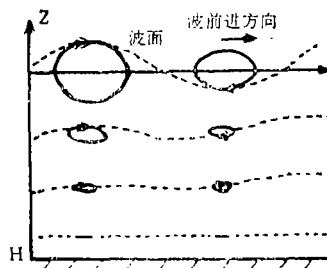


图3 波振幅随深度衰减示意图

4. 水波的色散关系

最后,我们讨论水波的相速度对波长的依赖关系。据波面方程知

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu$$

(λ 为波长, ν 为波频), 则有

$$\text{波速} \quad C_{\text{相}} = \lambda\nu = \frac{\omega}{K} \quad (22)$$

将速度势 φ 的表达式(17)式代入边条件(9)式, 得

$$\omega^2 = K \left(g + \frac{T_0 K^2}{\rho} \right) T_{\text{anh}} KH$$

(T_{anh} 为双曲正切函数)代入(22)式, 有

$$C_{\text{相}} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T_0}{\rho\lambda} \right) T_{\text{anh}} \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

对于深水波来说, $H \rightarrow \infty$ 时,

$$T_{\text{anh}} \frac{2\pi H}{\lambda} \rightarrow 1$$

则有

$$C_{\text{深}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T_0}{\rho\lambda}} \quad (23)$$

当水极浅时,

$$H \rightarrow 0 \quad \frac{2\pi H}{\lambda} \rightarrow 0, \text{ 而 } T_{\text{anh}} \frac{2\pi H}{\lambda} \rightarrow \frac{2\pi H}{\lambda},$$

则有

$$C_{\text{浅}} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T_0}{\rho\lambda} \right) \frac{2\pi H}{\lambda}} \quad (24)$$

(23)(24)两式表明, 对于二维圆形重力—表面张力水面发散波来说, 由于表面张力的影响, 无论深水波还是浅水波都是色散的, 这与重力平面波的性质不同, 在重力平面波的情况下, 深水波是色散的, 而浅水波是非色散的。

还应该指出, 从(23)(24)式可以看出, 对于长波来说, 主要是重力在起作用, 而对于短波, 则表面张力的贡献较大。

参 考 文 献

- [1] 吴望一, 《流体力学》179~212页, 北京大学出版社, 1983.3
- [2] 盛振邦, 《流体力学》259~311页, 北京科学教育编辑出版社, 1961.8
- [3] F.S.克劳福德, 《波动学》, 下册, 407~417页, 科学出版社, 1981.
- [4] 梁昆淼, 《数学物理方法》, 401~405页, 人民教育出版社, 1978.7

85026

论二维圆形重力表面张力水面发散的物理性质《无锡轻工业学院学报》1985年,第四卷,第3期

关键词 二维圆形重力 表面张力水面发散波

摘要 本文以二维圆形重力表面张力水面发散波为模式导出了相应的解,并根据解的形式讨论了这种波的物理性质。

作者: 蔡 鯤

85025

游离脂肪酸($C_4 \sim C_{11}$)的直接进样色谱分析《无锡轻工业学院学报》1985年,第四卷,第3期

关键词 气液色谱, 直接进样, 游离脂肪酸, 基线分离

摘要 通过选择合适浓度的固定液及配合低涂渍量和高性能担体, 在6分钟内对游离脂肪酸进行了直接进样快速分析。考察了固定液的选择及涂渍等方面的一些因素。获得了较为满意的结果, 分离度 ≥ 1.54 , 最大相对偏差 ≤ 0.073 , 最大均方差 ≤ 0.374 。

作者: 华东

85025

DIRECT INJECTION GAS-LIQUID CHROMATOGRAPHY in ANALYSIS of (C₄-C₁₁) FREE FATTY ACIDS《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》, Vol.4, No.3, 1985

KEYWORDS Free fatty acid Gas-liquid Chromatography Direct injection Base line separation.

ABSTRACT By selecting a suitable stationary phase, coordinating with low coating and high performance support, fast analysis of C₄-C₁₁ free acids in 8 minutes is accomplished by direct injection. Other factors such as selection of stationary phase and coating are investigated. The results are satisfactory. Separation $R \geq 1.54$, relative deviation 0.078, and mean square deviation ≤ 0.374 .

Author: Hua Tung

85026

A STUDY on the PHYSICAL PROPERTIES of TWO-DIMENSIONAL CIRCULAR GRAVITY and SURFACE-TENSION DIVERGING WATER WAVE《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》, Vol.4, No.3, 1985

KEYWORDS Two-Dimensional Circular Gravity and Surface-Tension Diverging Water Wave.

ABSTRACT The related solution is deduced from the mode of two-dimensional circular gravity and surface-tension diverging water wave. Following this form of solution, physical properties of the wave mode are also discussed.

Author: CaiKun