第7卷 无锡轻工业学院学报 Vol. 7
第2期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1988 No. 2

关于LYAPUNOV'S定理的不可逆问题

徐宝仁
(数学教研室)

在研究力学系统和自动控制系统时，考察系统的稳定性是一个十分重要的问题。研究稳定性的方法一般有两种：一种是直接求出解，然后研究它，即所谓ЛЯПУНОВ第一方法；另一种办法是构造一个函数(ЛЯПУНОВ函数)，然后从该函数的一些特性去研究它，即所谓ЛЯПУНОВ第二方法(直接方法)。因为这种方法不需要求出解，所以它对一般不能求出解的表达式的非线性系统是一种很有效的方法。ЛЯПУНОВ第二方法有四个基本定理[1]。在实际应用中，寻求ЛЯПУНОВ函数是较困难的。因此，必须研究ЛЯПУНОВ函数的存在问题。直到目前为止，这个问题还未完全解决，是稳定性问题研究方向之一[2][3]。要研究其存在问题，首先就要问定理是否可以逆转，即定理中的充分条件是否亦必要，本文拟举一反例来论证当系统为自治系统时，ЛЯПУНОВ第一定理是不可逆转的。

1 LYAPUNOV'S定理

设有自治系统

$$dx/dt=F(X) \tag{1}$$

其中

$$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$$

$$F(X)=[f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdots$$

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^T$$

$$F(O)=O$$

且$F(X)$在某区域G：$\|X\|\leqslant A$(A为一正常数)内有连续的偏导数，因而方程组(1)由初始条件$X(t_o)=X_o$所确定的解在原点的某邻域内存在且唯一，显然$X=0$是其特解。

(**定义**)如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使当任一X_o满足$\|X_o\|<\delta$时，方程组(1)的解$X=X(t,t_o,x_o)$在区间$t_o\leqslant t<+\infty$上有定义，并对一切$t\geqslant t_o$恒有不等式

$$\|X(t,t_o,X_o)\|<\varepsilon$$

成立，则称方程组(1)的零解$X=0$是稳定的。

研究运动稳定性的ЛЯПУНОВ第二方法的基本定理有四个，这里仅引出与本文有关的定理1。

本文1987年3月25日收到。

(定理1)如果对于方程组(1)，可以找到一个定正(定负)函数$V(X)$，它通过方程组(1)的全导数为常负的(常正的)或恒等于零，则方程组(1)的零解是稳定的。

对于给定的自治系统(1)，若能找到满足定理条件的函数$V(X)$（ЛЯПУНОВ函数），由定理即知其零解(平衡点)是稳定的，但是，定理的条件仅是充分的而非必要的，即对于系统(1)若其零解是稳定的，但是却未必一定存在满足定理条件的ЛЯПУНОВ函数，下面的例子恰好说明了这一点，从而也就论证了对于自治系统而言，定理1是不可逆转的。

2 LYAPUNOV′S定理的不可逆转问题

考察自治系统

$$\begin{cases} dx/dt=\begin{cases} -y+x\,(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases} \\ dy/dt=\begin{cases} x+y\,(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

令 $x=\gamma\cos\theta$，$y=\gamma\sin\theta$，则有

$$\begin{aligned} &dx/dt=-\gamma\sin\theta(d\theta/dt)+\cos\theta(dr/dt) \\ &dy/dt=\gamma\cos\theta(d\theta/dt)+\sin\theta(dr/dt) \end{aligned} \tag{3}$$

代入(2)，则有

$$-\gamma\sin\theta(d\theta/dt)+\cos\theta(dr/dt)=-\gamma\sin\theta+\gamma^3\cos\theta\sin(1/\gamma)$$

$$\gamma\cos\theta(d\theta/dt)+\sin\theta(dr/dt)=\gamma\cos\theta+\gamma^3\sin\theta\sin(1/\gamma)$$

解得

$$\begin{cases} dr/dt=\gamma^3\sin(1/\gamma) \\ d\theta/dt=1 \end{cases} \tag{4}$$

显然，方程组(4)有特解

$$\begin{cases} \gamma=1/(2K\pi) & K=1,2,3,\cdots \\ \theta=t_0+t \end{cases} \tag{5}$$

(5)是以2π为周期的周期解，其轨线为以原点为圆心，以$1/(2K\pi)(K=1,2,3,\cdots)$为半径的圆。当$t\to+\infty$时，轨线上的点沿逆时针方向运动。

下面考察在闭轨线周围其他轨线的性态，在相平面上任意作一个以原点为圆心，R为半径的圆，考虑通过圆$\gamma=R$上任一点$(R,\ \theta^*)$处轨线的走向。

当 $1/[(2K+1)\pi]<R=R_1<1/(2K\pi)$ $(K=1,2,3,\cdots)$时，由(4)

$$dr/dt|_{r=R1}=R_1{}^3\sin(1/R_1)>0$$

$$d\theta/dt|_{\theta=\theta^*}=1>0$$

即轨线按逆时针方向从圆 $r=R_1$ 内走出圆外。

当 $1/(2K\pi)<R=R_2<1/[(2K-1)\pi]$ $(K=1,2,3,\cdots)$时，由(4)

$$dr/dt|_{r=R_2}=R_2^3\sin(1/R_2)<0$$

$$d\theta/dt|_{\theta=\theta^*}=1>0$$

即轨线按逆时针方向从圆 $r=R_2$ 外走进圆内。

考虑由 $R_1<r<R_2$ 组成的环域G。由方程组(4)知，G内无(4)的奇点，同时在边界 $r=R_1$和 $r=R_2$ 上，所有轨线均从G外进入G内，但又不能越过闭轨线$r=1/(2K\pi)(K=1,2,3,\cdots)$。因而，它们必然是无限地盘旋逼近于闭轨线$r=1/(2K\pi)(K=1,2,3,\cdots)$（见图1），所以，方程组(2)具有一族稳定的极限圈：

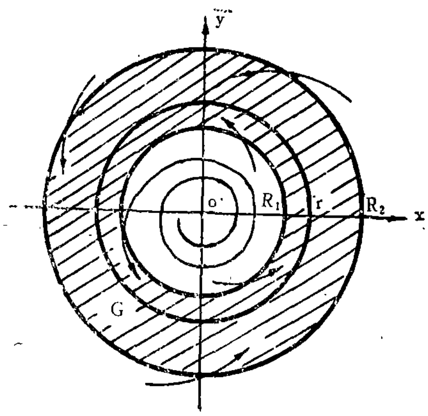

图 1

$$x^2+y^2=r^2 \qquad r=1/(2K\pi) \qquad K=1,2,3,\cdots$$

因而方程组(2)的零解(0,0)是稳定的。

下面论证对于方程组(2)不存在满足定理1条件的ЛЯПУНОВ函数$V(x,y)$，也就是说，对任何定正函数$V(x,y)$(定负函数)均不能使$dv/dt\leqslant 0$($dv/dt\geqslant 0$)。分两种情形来证明：

特殊情形：设$v=1/2(x^2+y^2)$

$$dv/dt=x[-y+x(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})]+y[x+y(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})]$$

$$=(x^2+y^2)^2\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$$

显然，当 $(2K-1)\pi<1/\sqrt{x^2+y^2}<2K\pi(K=1,2,\cdots)$时，$dv/dt<0$

当 $2K\pi<1/\sqrt{x^2+y^2}<(2K+1)\pi(K=1,2,\cdots)$时，$dv/dt>0$

即在原点(0,0)附近dv/dt是变号函数。

一般情形：设$v(x,y)$是一般的定正函数

取初始点(x_0,y_0)足够接近于原点，且使$\sin(1/\sqrt{x_0^2+y_0^2})=0$，则方程组(2)所对应的解为圆

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$$

令$x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，显然有

$$x(t_0+2\pi)=x(t_0)=x_0$$

$$y(t_0+2\pi)=y(t_0)=y_0$$

故必存在$T=t_0+2\pi>t_0$，使$v(x_0,\ y_0)=v(x(T),\ y(T))$，但$dv/dt\not\equiv 0$(否则$v\equiv C$)，故$dv/dt$沿上述积分曲线必定变号，即在原点(0,0)附近变号，即得证。

3 结束语

上面举了个反例从一个侧面论证了ЛЯПУНОВ定理中的条件仅是充分的，并非必要的。这是关于自治系统

$$dx/dt=F(X)$$

的ЛЯПУНОВ意义下稳定的第一定理的不可逆的例子，由此即知关于自治系统ЛЯПУНОВ第一定理是不可逆的。和上述论证相仿还可论证形如

$$\begin{cases} dx/dt=\begin{cases} -y+x(x^2+y^2)^M\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases} \\ dy/dt=\begin{cases} x+y(x^2+y^2)^M\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases} \end{cases}$$

(其中M为非负常数)的自治系统的零解是稳定的，但却不存在满足定理条件的ЛЯПУНОВ函数。总之，关于自治系统的ЛЯПУНОВ第一定理是不可逆的。

参考文献

[1] МАЛКИН И Г.运动稳定性理论.北京：科学出版社，1958

[2] 秦元勋等. 运动稳定性理论与应用.（纯粹数学与应用数学专著第8号）北京：科学出版社，1981

[3] 王联，王慕秋.论李雅普诺夫函数的构造.数学进展，1984；13(2)

A880213

关于 *LYAPUNOV'S* 定理的不可逆问题《无锡轻工业学院学报》

1988年，第7卷，第2期

关键词 自治系统；定正函数；稳定性；李雅普诺夫定理

摘 要 本文通过一个反例论证了李雅普诺夫定理的不可逆性。

作者：徐宝仁

A880213

ON THE IRREVERSIBILITY of LYAPUNOV'S THEOREN

《Journal of the Wuxi Institute of Light Industry》 Vol.7, No.2, 1988

ABSTRACT

In this paper, the irreversibility of Lyapunov's theoren is proved by means of an inverse example.

SUBJECTWORDS

autonomous system; positive definite function; stability; lyapunov's theoren

Author: Xu Baoren