第7卷 无锡轻工业学院学报 Vol.7
第3期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1988 No.3

平面上5×n矩形格图中圈的计数

查起兆 徐宝仁 何安舟

（基础课部）

摘 要

本文讨论了平面上5×*n*矩形格图中圈的计数问题，并得到了用矩阵表示结果的公式。

关键词：图；格图；圈；平面格图圈／计数

一个有限图上圈的计数问题是一个困难的组合问题。对集成电路的线路设计，有机分子的结构等，都有实用意义。[1]中讨论了平面上2×n矩形格图中圈的计数问题，得到了相应的计数公式。[2]中讨论了平面上2×n矩形和环形格图以及3/2×n矩形和环形格图中圈的计数问题，得到相应的计数公式。[3]中得到平面上2×n，3×n和4×n矩形格图中圈的计数方法。[4]中得到了4×n格图中圈的计算公式。本文将讨论平面上5×n矩形格图中圈的计数问题，并得到相应的公式。

1 概论和记号

平面上一个矩形格图是指边界为矩形，网眼形状也是矩形的一个网格图。

在一矩形格图中，如果每个网眼由二组正交直线族划分而成，且纵宽为m格，横宽为n格，则称它为m×n矩形格图，简称m×n格图。

格图中的一个格图圈是指图中的一个初级回路，它不自相交，每个顶点在自身的度数均为2，简称为圈。

格图中如果一个圈的纵向宽为h格，横向宽为k格，就称它为h×k矩形格图圈，简称为h×k圈。

一个h×k可以用对应的h×k(0，1)——矩阵表示，矩阵的元素对应于相应的h×k格图的网格，如果网格包含在圈内，相应的元素为1，否则为0。

为方便起见，再引入上列记号：

$f(m,n)$ 表示 $m\times n$ 格图圈的总圈数；

a_l 表示 $m\times l$ 格图中横向宽为 l（格）的圈的不同种数，其中 m,l 为正整数。

本文1987年5月18日收到。

在 $5\times l$ 格图中，横向宽为 l 的圈所对应的(0，1)——矩阵的每个列向量共有下列 31 种型式：

$$(1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(2)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\quad(3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(4)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\quad(5)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(6)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(7)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad(8)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\quad(9)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(10)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\quad(11)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad(12)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(13)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad(14)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(15)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(16)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(17)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(18)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(19)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(20)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\quad(21)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\quad(22)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(23)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\quad(24)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(25)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(26)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(27)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(28)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(29)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(30)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(31)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$a_l^{(i)}$ 表示构成横向宽为 l，右端为 (i) 型的一个格图圈的圈数；

$b_l^{(i)}$ 表示右端为 (i) 型，构成二个顶点不相交的均到达最右端的格图圈，且其中至少一个横向宽为 l 的不同种数；

$b_l^{(31)i}$ 表示右端为(31)型整个格图由三个均到达最右端的格图圈构成，$b_l^{(31)1}$ 为上面的格图圈与中间格图圈相交，$b_l^{(31)2}$ 为中间格图圈与下面格图圈相交，$b_l^{(31)3}$ 为上面格图圈与下面格图圈相交，且三个格图圈中至少有一个横向宽为 l 的不同种数；

$c_l^{(31)}$ 表示右端为(31)型整个格图由三个均到达最右端的点不相交的格图圈构成，且三个格图圈中至少有一个横向宽为 l 的不同种数。

2 引理和定理

引理1 在 $5\times l$ 格图中，$a_l=\delta H^{l-1}\alpha_1 \quad (l\geqslant 1)$

这里 $\delta=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,$

$0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)^T$

$\alpha_1=(1,2,1,2,2,2,2,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,1,$

$2,2,2,2,2,1,1,0,0,1)^T$

$$H=\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1\\
2&2&2&2&2&2&1&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&2&2&1&1&1&1&2&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
2&2&2&2&1&2&1&1&2&1&0&0&1&1&1&1&0&2&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1&2&0\\
2&2&2&1&1&1&1&1&0&1&2&2&2&1&2&0&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&2&2&1&2&0&1&2&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&1&0&1&1&0&1&0&0&2&2&1&2&1&1&1&0&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&2&1&1&1&0&1&0&1&2&2&1&1&1&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&2&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&2&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&2&0&0&0&0&0&0&0&2&2&1&0&1&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&1&0&0&0&0&0&0&0&1&2&1&2&1&1&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&1&0&0&0&0&0&0&0&1&2&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&1&0&1&0&0&0&0&0&2&0&0&0&1&0&1&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&2&1&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&2&0&2&0&0&2\\
0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&1&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&1&0&1&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&1&2&1&2&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&2&1&2&1&1&0&0&2&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&2&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&2&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&0&2&0&0&0&0&0&0&1&0&2&0&2&0&0&0&1&0&1&0&0&2&2&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1
\end{pmatrix}$$

证：在$5\times l$矩形格图中，以图上可直接得到下列递归式：

$$a_l^{(1)}=\sum_{i=1}^{15}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=1}^{30}b_{l-1}^{(i)}+c_{l-1}^{(31)}$$

$$a_l^{(2)}=\sum_{i=1}^{11}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=13}^{15}a_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(16)}+\sum_{i=18}^{21}b_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(23)}+b_{l-1}^{(25)}+b_{l-1}^{(27)}+$$
$$+b_{l-1}^{(29)}.$$

$$a_l^{(3)}=\sum_{i=1}^{10}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=12}^{15}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=17}^{20}b_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=11}^{14}b_{l-1}^{(2i)}+b_{l-1}^{(29)}.$$

$$a_l^{(4)}=\sum_{i=1}^{10}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=13}^{15}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=18}^{20}b_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(29)}.$$

$$a_l^{(5)}=\sum_{i=1}^{7}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=9}^{11}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=6}^{8}a_{l-1}^{(2i+1)}+\sum_{i=11}^{15}a_{l-1}^{(2i)}+b_{l-1}^{(16)}+b_{l-1}^{(23)}+$$
$$+b_{l-1}^{(27)}+b_{l-1}^{(31)_2}+b_{l-1}^{(31)_3}.$$

$$a_l^{(6)}=\sum_{i=1}^{6}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=8}^{10}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(12)}+\sum_{i=14}^{16}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=10}^{13}a_{l-1}^{(2i+1)}+a_{l-1}^{(30)}+$$
$$+b_{l-1}^{(17)}+b_{l-1}^{(24)}+b_{l-1}^{(28)}+b_{l-1}^{(31)_1}+b_{l-1}^{(31)_3}.$$

$$a_l^{(7)}=\sum_{i=1}^{5}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=3}^{6}a_{l-1}^{(2i+1)}+a_{l-1}^{(17)}+\sum_{i=18}^{22}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=24}^{26}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(29)}+a_{l-1}^{(30)}.$$

$$a_l^{(8)}=\sum_{i=1}^{4}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=3}^{8}a_{l-1}^{(2i)}+\sum_{i=18}^{23}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(25)}+a_{l-1}^{(26)}+a_{l-1}^{(29)}+a_{l-1}^{(30)}.$$

$$a_l^{(9)}=\sum_{i=1}^{7}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(9)}+a_{l-1}^{(10)}+\sum_{i=6}^{8}a_{l-1}^{(2i+1)}+\sum_{i=11}^{14}a_{l-1}^{(2i)}.$$

$$a_l^{(10)}=\sum_{i=1}^{6}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=8}^{10}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=14}^{16}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=10}^{13}a_{l-1}^{(2i+1)}.$$

$$a_l^{(11)}=a_{l-1}^{(1)}+a_{l-1}^{(2)}+a_{l-1}^{(5)}+a_{l-1}^{(7)}+a_{l-1}^{(11)}+\sum_{i=16}^{19}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=21}^{23}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(25)}+$$
$$+a_{l-1}^{(27)}+a_{l-1}^{(30)}+a_{l-1}^{(31)}.$$

$$a_l^{(12)}=a_{l-1}^{(1)}+a_{l-1}^{(3)}+a_{l-1}^{(6)}+a_{l-1}^{(8)}+a_{l-1}^{(12)}+\sum_{i=16}^{18}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=20}^{22}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=12}^{15}a_{l-1}^{(2i)}+$$
$$+a_{l-1}^{(31)}$$

$$a_l^{(13)}=\sum_{i=1}^{5}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(7)}+a_{l-1}^{(9)}+a_{l-1}^{(13)}+\sum_{i=17}^{20}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=11}^{13}a_{l-1}^{(2i)}+a_{l-1}^{(29)}.$$

$$a_l^{(14)}=\sum_{i=1}^{4}a_{l-1}^{(i)}+\sum_{i=3}^{5}a_{l-1}^{(2i)}+a_{l-1}^{(14)}+a_{l-1}^{(16)}+\sum_{i=18}^{21}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(23)}+a_{l-1}^{(25)}+a_{l-1}^{(29)}.$$

$$a_l^{(15)}=\sum_{i=1}^{6}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(9)}+a_{l-1}^{(10)}+\sum_{i=15}^{17}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(23)}+a_{l-1}^{(24)}+\sum_{i=27}^{28}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(31)}.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_l^{(16)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(2)} + a_{l-1}^{(5)} + a_{l-1}^{(16)} + \sum_{i=10}^{13} a_{l-1}^{(2i+1)} + a_{l-1}^{(30)} + b_{l-1}^{(17)} + b_{l-1}^{(31)_1} + b_{l-1}^{(31)_3}. \\
a_l^{(17)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(3)} + a_{l-1}^{(6)} + a_{l-1}^{(17)} + \sum_{i=11}^{15} a_{l-1}^{(2i)} + b_{l-1}^{(16)} + b_{l-1}^{(31)_2} + b_{l-1}^{(31)_3}. \\
a_l^{(18)} &= \sum_{i=1}^{4} a_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=18}^{22} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(25)} + a_{l-1}^{(26)} + a_{l-1}^{(29)} + a_{l-1}^{(30)}. \\
a_l^{(19)} &= \sum_{i=1}^{4} a_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=18}^{21} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(25)} + a_{l-1}^{(29)}. \\
a_l^{(20)} &= \sum_{i=1}^{4} a_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=18}^{20} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(22)} + a_{l-1}^{(26)} + a_{l-1}^{(29)}. \\
a_l^{(21)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(2)} + a_{l-1}^{(16)} + a_{l-1}^{(18)} + a_{l-1}^{(19)} + \sum_{i=21}^{23} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(25)} + a_{l-1}^{(30)}. \\
a_l^{(22)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(3)} + a_{l-1}^{(17)} + a_{l-1}^{(18)} + \sum_{i=20}^{22} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(24)} + a_{l-1}^{(26)} + a_{l-1}^{(30)}. \\
a_l^{(23)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(2)} + a_{l-1}^{(5)} + a_{l-1}^{(16)} + \sum_{i=10}^{13} a_{l-1}^{(2i+1)}. \\
a_l^{(24)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(3)} + a_{l-1}^{(6)} + a_{l-1}^{(17)} + \sum_{i=11}^{14} a_{l-1}^{(2i)}. \\
a_l^{(25)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(2)} + a_{l-1}^{(16)} + a_{l-1}^{(18)} + a_{l-1}^{(19)} + \sum_{i=10}^{12} a_{l-1}^{(2i+1)}. \\
a_l^{(26)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(3)} + a_{l-1}^{(17)} + \sum_{i=9}^{13} a_{l-1}^{(2i)}. \\
a_l^{(27)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(2)} + a_{l-1}^{(5)} + a_{l-1}^{(16)} + a_{l-1}^{(17)} + a_{l-1}^{(23)} + a_{l-1}^{(27)} + a_{l-1}^{(31)}. \\
a_l^{(28)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(3)} + a_{l-1}^{(6)} + a_{l-1}^{(16)} + a_{l-1}^{(17)} + a_{l-1}^{(24)} + a_{l-1}^{(28)} + a_{l-1}^{(31)}. \\
a_l^{(29)} &= \sum_{i=1}^{4} a_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=18}^{20} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(29)}. \\
a_l^{(30)} &= a_{l-1}^{(1)} + \sum_{i=16}^{18} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(21)} + a_{l-1}^{(22)} + a_{l-1}^{(30)} + a_{l-1}^{(31)}. \\
a_l^{(31)} &= a_{l-1}^{(1)} + a_{l-1}^{(16)} + a_{l-1}^{(17)} + a_{l-1}^{(31)}. \\
b_l^{(16)} &= a_{l-1}^{(6)} + a_{l-1}^{(8)} + \sum_{i=10}^{12} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(14)} + a_{l-1}^{(15)} + b_{l-1}^{(16)} + \sum_{i=10}^{13} b_{l-1}^{(2i+1)} + b_{l-1}^{(28)} + \\
&\quad + b_{l-1}^{(30)} + c_{l-1}^{(31)}. \\
b_l^{(17)} &= \sum_{i=2}^{4} a_{l-1}^{(2i+1)} + \sum_{i=11}^{13} a_{l-1}^{(i)} + a_{l-1}^{(15)} + b_{l-1}^{(17)} + \sum_{i=11}^{15} b_{l-1}^{(2i)} + b_{l-1}^{(27)} + c_{l-1}^{(31)}. \\
b_l^{(18)} &= a_{l-1}^{(7)} + a_{l-1}^{(8)} + \sum_{i=11}^{14} a_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=18}^{22} b_{l-1}^{(i)} + b_{l-1}^{(25)} + b_{l-1}^{(26)} + b_{l-1}^{(29)} + b_{l-1}^{(30)}.
\end{aligned}
\right.
\tag{1}
$$

$$
\begin{cases}
b_l^{(19)}=a_{l-1}^{(7)}+a_{l-1}^{(8)}+a_{l-1}^{(11)}+a_{l-1}^{(13)}+a_{l-1}^{(14)}+\sum\limits_{i=18}^{21}b_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(25)}+b_{l-1}^{(29)}. \\
b_l^{(20)}=a_{l-1}^{(7)}+a_{l-1}^{(8)}+\sum\limits_{i=12}^{14}a_{l-1}^{(i)}+\sum\limits_{i=18}^{20}b_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(22)}+b_{l-1}^{(26)}+b_{l-1}^{(29)}. \\
b_l^{(21)}=\sum\limits_{i=6}^{8}a_{l-1}^{(i)}+\sum\limits_{i=10}^{12}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(14)}+b_{l-1}^{(16)}+b_{l-1}^{(18)}+\sum\limits_{i=9}^{12}b_{l-1}^{(2i+1)}+b_{l-1}^{(22)}+b_{l-1}^{(30)}. \\
b_l^{(22)}=a_{l-1}^{(5)}+\sum\limits_{i=7}^{9}a_{l-1}^{(i)}+\sum\limits_{i=11}^{13}a_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(17)}+\sum\limits_{i=9}^{13}b_{l-1}^{(2i)}+b_{l-1}^{(21)}+b_{l-1}^{(30)}. \\
b_l^{(23)}=\sum\limits_{i=3}^{5}a_{l-1}^{(2i)}+a_{l-1}^{(11)}+a_{l-1}^{(14)}+a_{l-1}^{(15)}+b_{l-1}^{(16)}+\sum\limits_{i=10}^{13}b_{l-1}^{(2i+1)}. \\
b_l^{(24)}=\sum\limits_{i=2}^{4}a_{l-1}^{(2i+1)}+a_{l-1}^{(12)}+a_{l-1}^{(13)}+a_{l-1}^{(15)}+b_{l-1}^{(17)}+\sum\limits_{i=11}^{14}b_{l-1}^{(2i)}. \\
b_l^{(25)}=\sum\limits_{i=6}^{8}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(10)}+a_{l-1}^{(11)}+a_{l-1}^{(14)}+b_{l-1}^{(16)}+b_{l-1}^{(18)}+\sum\limits_{i=9}^{12}b_{l-1}^{(2i+1)}. \\
b_l^{(26)}=a_{l-1}^{(5)}+\sum\limits_{i=7}^{9}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(12)}+a_{l-1}^{(13)}+b_{l-1}^{(17)}+\sum\limits_{i=9}^{13}b_{l-1}^{(2i)}. \\
b_l^{(27)}=a_{l-1}^{(6)}+a_{l-1}^{(10)}+a_{l-1}^{(11)}+a_{l-1}^{(15)}+a_{l-1}^{(28)}+a_{l-1}^{(30)}+b_{l-1}^{(16)}+b_{l-1}^{(17)}+b_{l-1}^{(23)}+ \\
\qquad +b_{l-1}^{(27)}+\sum\limits_{i=1}^{3}b_{l-1}^{(31)_i}. \\
b_l^{(28)}=a_{l-1}^{(5)}+a_{l-1}^{(9)}+a_{l-1}^{(12)}+a_{l-1}^{(15)}+a_{l-1}^{(27)}+a_{l-1}^{(30)}+b_{l-1}^{(16)}+b_{l-1}^{(17)}+ \\
\qquad +b_{l-1}^{(24)}+b_{l-1}^{(28)}+\sum\limits_{i=1}^{3}b_{l-1}^{(31)_i}. \\
b_l^{(29)}=a_{l-1}^{(7)}+a_{l-1}^{(8)}+a_{l-1}^{(13)}+a_{l-1}^{(14)}+\sum\limits_{i=18}^{20}b_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(29)}. \\
b_l^{(30)}=\sum\limits_{i=5}^{8}a_{l-1}^{(i)}+a_{l-1}^{(11)}+a_{l-1}^{(12)}+a_{l-1}^{(27)}+a_{l-1}^{(28)}+\sum\limits_{i=16}^{18}b_{l-1}^{(i)}+b_{l-1}^{(21)}+b_{l-1}^{(22)}+ \\
\qquad +b_{l-1}^{(30)}+\sum\limits_{i=1}^{3}b_{l-1}^{(31)_i}. \\
b_l^{(31)_1}=a_{l-1}^{(5)}+a_{l-1}^{(27)}+b_{l-1}^{(17)}+b_{l-1}^{(31)_1}. \\
b_l^{(31)_2}=a_{l-1}^{(6)}+a_{l-1}^{(28)}+b_{l-1}^{(16)}+b_{l-1}^{(31)_2}. \\
b_l^{(31)_3}=a_{l-1}^{(30)}+b_{l-1}^{(31)_3}. \\
c_l^{(31)}=a_{l-1}^{(11)}+a_{l-1}^{(12)}+a_{l-1}^{(15)}+b_{l-1}^{(27)}+b_{l-1}^{(28)}+b_{l-1}^{(30)}+c_{l-1}^{(31)}.
\end{cases}
$$

由于图的对称性　令

$$D_{l-1}^{(1)}=a_{l-1}^{(1)}.\qquad D_{l-1}^{(2)}=a_{l-1}^{(2)}+a_{l-1}^{(3)}.\qquad D_{l-1}^{(3)}=a_{l-1}^{(4)}$$

$$D_{l-1}^{(4)}=a_{l-1}^{(5)}+a_{l-1}^{(6)}.\qquad D_{l-1}^{(5)}=a_{l-1}^{(7)}+a_{l-1}^{(8)}.\qquad D_{l-1}^{(6)}=a_{l-1}^{(9)}+a_{l-1}^{(10)}$$

$$D_{l-1}^{(7)}=a_{l-1}^{(11)}+a_{l-1}^{(12)}.\qquad D_{l-1}^{(8)}=a_{l-1}^{(13)}+a_{l-1}^{(14)}.\qquad D_{l-1}^{(9)}=a_{l-1}^{(15)}$$

$$D_{l-1}^{(10)}=a_{l-1}^{(16)}+a_{l-1}^{(17)}.\qquad D_{l-1}^{(11)}=a_{l-1}^{(18)}.\qquad D_{l-1}^{(12)}=a_{l-1}^{(19)}+a_{l-1}^{(20)}$$

$$D_{l-1}^{(13)}=a_{l-1}^{(21)}+a_{l-1}^{(22)}.\qquad D_{l-1}^{(14)}=a_{l-1}^{(23)}+a_{l-1}^{(24)}.\qquad D_{l-1}^{(15)}=a_{l-1}^{(25)}+a_{l-1}^{(26)}$$

$$D_{l-1}^{(16)}=a_{l-1}^{(27)}+a_{l-1}^{(28)}.\qquad D_{l-1}^{(17)}=a_{l-1}^{(29)}.\qquad D_{l-1}^{(18)}=a_{l-1}^{(30)}.$$

$$D_{l-1}^{(19)}=a_{l-1}^{(31)}.\qquad D_{l-1}^{(20)}=b_{l-1}^{(16)}+b_{l-1}^{(17)}.\qquad D_{l-1}^{(21)}=b_{l-1}^{(18)}.$$

$$D_{l-1}^{(22)}=b_{l-1}^{(19)}+b_{l-1}^{(20)}.\qquad D_{l-1}^{(23)}=b_{l-1}^{(21)}+b_{l-1}^{(22)}.\qquad D_{l-1}^{(24)}=b_{l-1}^{(23)}+b_{l-1}^{(24)}.$$

$$D_{l-1}^{(25)}=b_{l-1}^{(25)}+b_{l-1}^{(26)}.\qquad D_{l-1}^{(26)}=b_{l-1}^{(27)}+b_{l-1}^{(28)}.\qquad D_{l-1}^{(27)}=b_{l-1}^{(29)}$$

$$D_{l-1}^{(28)}=b_{l-1}^{(30)}.\qquad D_{l-1}^{(29)}=b_{l-1}^{(31)_1}+b_{l-1}^{(31)_2}\qquad D_{l-1}^{(30)}=b_{l-1}^{(31)_3}$$

$$D_{l-1}^{(31)}=c_{l-1}^{(31)}.$$

于是可将(1)式化为

$$\begin{cases}
D_l^{(1)}=\sum\limits_{i=1}^{9}D_{l-1}^{(i)}+\sum\limits_{i=20}^{28}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(31)}.\\
D_l^{(2)}=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{6}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(7)}+2(D_{l-1}^{(8)}+D_{l-1}^{(9)})+D_{l-1}^{(20)}+2\cdot\sum\limits_{i=21}^{22}D_{l-1}^{(i)}+\\
\qquad+\sum\limits_{i=23}^{26}D_{l-1}^{(i)}+2\cdot D_{l-1}^{(27)}.\\
D_l^{(3)}=\sum\limits_{i=1}^{6}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(8)}+D_{l-1}^{(9)}+D_{l-1}^{(21)}+D_{l-1}^{(22)}+D_{l-1}^{(27)}.\\
D_l^{(4)}=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(5)}+2\cdot D_{l-1}^{(6)}+D_{l-1}^{(7)}+D_{l-1}^{(8)}+2\cdot D_{l-1}^{(9)}+D_{l-1}^{(10)}+\\
\qquad+\sum\limits_{i=13}^{16}D_{l-1}^{(i)}+2D_{l-1}^{(18)}+D_{l-1}^{(20)}+\sum\limits_{i=12}^{13}D_{l-1}^{(2i)}+D_{l-1}^{(29)}+2D_{l-1}^{(30)}.\\
D_l^{(5)}=2\sum\limits_{i=1}^{3}D_{l-1}^{(i)}+\sum\limits_{i=4}^{8}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(10)}+2\sum\limits_{i=11}^{13}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(14)}+2D_{l-1}^{(15)}+2(D_{l-1}^{(17)}\\
\qquad+D_{l-1}^{(18)})
\end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
D_l^{(6)} &= 2\sum_{i=1}^{4} D_{l-1}^{(i)} + D_{l-1}^{(5)} + 2D_{l-1}^{(6)} + D_{l-1}^{(8)} + 2D_{l-1}^{(9)} + D_{l-1}^{(10)} + \sum_{i=13}^{15} D_{l-1}^{(i)} \\
D_l^{(7)} &= 2D_{l-1}^{(1)} + D_{l-1}^{(2)} + D_{l-1}^{(4)} + D_{l-1}^{(5)} + D_{l-1}^{(7)} + 2\left(D_{l-1}^{(10)} + D_{l-1}^{(11)}\right) + D_{l-1}^{(12)} + \\
&\quad + 2D_{l-1}^{(13)} + \sum_{i=14}^{16} D_{l-1}^{(i)} + 2\sum_{i=18}^{19} D_{l-1}^{(i)} . \\
D_l^{(8)} &= 2\sum_{i=1}^{3} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=4}^{6} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=4}^{5} D_{l-1}^{(2i)} + 2\sum_{i=11}^{12} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=13}^{15} D_{l-1}^{(i)} + 2D_{l-1}^{(17)} . \\
D_l^{(9)} &= \sum_{i=1}^{4} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=2}^{3} D_{l-1}^{(3i)} + D_{l-1}^{(10)} + D_{l-1}^{(14)} + D_{l-1}^{(16)} + D_{l-1}^{(19)} . \\
D_l^{(10)} &= 2D_{l-1}^{(1)} + \sum_{i=1}^{2} D_{l-1}^{(2i)} + D_{l-1}^{(10)} + \sum_{i=13}^{16} D_{l-1}^{(i)} + 2D_{l-1}^{(18)} + D_{l-1}^{(20)} + D_{l-1}^{(29)} + 2D_{l-1}^{(30)} . \\
D_l^{(11)} &= \sum_{i=1}^{3} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=11}^{13} D_{l-1}^{(i)} + D_{l-1}^{(15)} + \sum_{i=17}^{18} D_{l-1}^{(i)} . \\
D_l^{(12)} &= 2\sum_{i=1}^{3} D_{l-1}^{(i)} + 2\sum_{i=11}^{12} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=6}^{7} D_{l-1}^{(2i+1)} + 2D_{l-1}^{(17)} . \\
D_l^{(13)} &= 2D_{l-1}^{(1)} + D_{l-1}^{(2)} + D_{l-1}^{(10)} + 2D_{l-1}^{(11)} + D_{l-1}^{(12)} + 2D_{l-1}^{(13)} + \sum_{i=14}^{15} D_{l-1}^{(i)} + 2D_{l-1}^{(18)} . \\
D_l^{(14)} &= 2D_{l-1}^{(1)} + D_{l-1}^{(2)} + D_{l-1}^{(4)} + D_{l-1}^{(10)} + \sum_{i=13}^{15} D_{l-1}^{(i)} . \\
D_l^{(15)} &= 2D_{l-1}^{(1)} + D_{l-1}^{(2)} + D_{l-1}^{(10)} + 2D_{l-1}^{(11)} + \sum_{i=12}^{15} D_{l-1}^{(i)} . \\
D_l^{(16)} &= 2D_{l-1}^{(1)} + \sum_{i=1}^{2} D_{l-1}^{(2i)} + 2D_{l-1}^{(10)} + \sum_{i=7}^{8} D_{l-1}^{(2i)} + 2D_{l-1}^{(19)} . \\
D_l^{(17)} &= \sum_{i=1}^{3} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=11}^{12} D_{l-1}^{(i)} + D_{l-1}^{(17)} . \\
D_l^{(18)} &= D_{l-1}^{(1)} + \sum_{i=10}^{11} D_{l-1}^{(i)} + D_{l-1}^{(13)} + \sum_{i=18}^{19} D_{l-1}^{(i)} . \\
D_l^{(19)} &= D_{l-1}^{(1)} + D_{l-1}^{(10)} + D_{l-1}^{(19)} . \\
D_l^{(20)} &= \sum_{i=4}^{6} D_{l-1}^{(i)} + 2\sum_{i=3}^{4} D_{l-1}^{(2i+1)} + D_{l-1}^{(18)} + D_{l-1}^{(20)} + \sum_{i=23}^{25} D_{l-1}^{(i)} + 2\sum_{i=13}^{14} D_{l-1}^{(2i)} + \\
&\quad + 2D_{l-1}^{(31)} . \\
D_l^{(21)} &= D_{l-1}^{(5)} + \sum_{i=7}^{8} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=21}^{23} D_{l-1}^{(i)} + D_{l-1}^{(25)} + \sum_{i=27}^{28} D_{l-1}^{(i)} . \\
D_l^{(22)} &= 2D_{l-1}^{(5)} + D_{l-1}^{(7)} + 2D_{l-1}^{(8)} + 2\sum_{i=21}^{22} D_{l-1}^{(i)} + \sum_{i=11}^{12} D_{l-1}^{(2i+1)} + 2D_{l-1}^{(27)} . \\
D_l^{(23)} &= \sum_{i=2}^{4} D_{l-1}^{(2i)} + 2\sum_{i=2}^{3} D_{l-1}^{(2i+1)} + D_{l-1}^{(20)} + 2\sum_{i=10}^{11} D_{l-1}^{(2i+1)} + D_{l-1}^{(22)} + \sum_{i=24}^{25} D_{l-1}^{(i)} +
\end{aligned}
\right.
\qquad (2)
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +2D_{l-1}^{(28)}.\\
&D_l^{(24)}=\sum_{i=4}^{8}D_{l-1}^{(i)}+2D_{l-1}^{(9)}+D_{l-1}^{(20)}+\sum_{i=23}^{26}D_{l-1}^{(i)}.\\
&D_l^{(25)}=D_{l-1}^{(4)}+2D_{l-1}^{(5)}+\sum_{i=6}^{8}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(20)}+2D_{l-1}^{(21)}+\sum_{i=22}^{25}D_{l-1}^{(i)}.\\
&D_l^{(26)}=D_{l-1}^{(4)}+\sum_{i=6}^{7}D_{l-1}^{(i)}+2D_{l-1}^{(9)}+D_{l-1}^{(16)}+2\sum_{i=9}^{10}D_{l-1}^{(2i)}+\sum_{i=12}^{13}D_{l-1}^{(2i)}+2\sum_{i=29}^{30}D_{l-1}^{(i)}.\\
&D_l^{(27)}=D_{l-1}^{(5)}+D_{l-1}^{(8)}+\sum_{i=21}^{22}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(27)}.\\
&D_l^{(28)}=\sum_{i=4}^{5}D_{l-1}^{(i)}+D_{l-1}^{(7)}+\sum_{i=4}^{5}D_{l-1}^{(4i)}+\sum_{i=10}^{11}D_{l-1}^{(2i+1)}+\sum_{i=28}^{30}D_{l-1}^{(i)}\\
&D_l^{(29)}=D_{l-1}^{(4)}+\sum_{i=4}^{5}D_{l-1}^{(4i)}+D_{l-1}^{(29)}.\\
&D_l^{(30)}=D_{l-1}^{(18)}+D_{l-1}^{(30)}.\\
&D_l^{(31)}=\sum_{i=3}^{4}D_{l-1}^{(2i+1)}+\sum_{i=13}^{14}D_{l-1}^{(2i)}+D_{l-1}^{(31)}.
\end{aligned}
$$

令　$\alpha_l=(D_l^{(1)},\ D_l^{(2)},\ \cdots,\ D_l^{(31)})^T$　　$(l\geqslant 1)$

因而　$\alpha_1=(1,2,1,2,2,2,2,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,$
$1,2,2,2,2,2,1,1,0,0,1)^T$

由(2)得：$\alpha_l=H\alpha_{l-1}=H^2\alpha_{l-2}=\cdots=H^{l-1}\alpha_1$　　$(l\geqslant 1)$

于是可得：$a_l=\sum\limits_{i=1}^{31}a_l^{(i)}=\sum\limits_{i=1}^{19}D_l^{(i)}=\delta^T\alpha_l=\delta^TH^{l-1}\alpha_1$　　$(l\geqslant 1)$

引理得证。

引理 2[2]　在$m\times n$格图中m、n为正整数，

则
$$f(m,n)=\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)a_l$$

定理：
$$f(5,n)=\delta^T\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)H^{l-1}\alpha_1$$

证：由引理1、2得：

$$f(5,n)=\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)a_l$$

$$=\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)\ \delta^{T}H^{l-1}\alpha_1$$

$$=\delta^{T}\sum_{l=1}^{n}(n-l+1)\ H^{l-1}\alpha_1$$

致　　谢

本文得到南京师范大学数学系吴正声教授的指导和帮助，在此深表谢意。

参 考 文 献

[1] 杨世明，张忠辅。平面格图圈的计数。第二届全国组合数学会议文献。1985
[2] 朱鼎相,叶秀明.平面上矩形格图圈和环形格图圈的计数.上海科技大学学报，1986,Ⅲ
[3] 柳柏濂．关于平面格图圈的计数．数学的实践与认识．1987；1
[4] 邹　园．平面上4×n矩形格图圈的计数．南京师范大学学报．待发表

The Enumeration of CyCle of the 5×n Rectangular Lattied Graph on the Plan

Zha Qizhao　Xu Baoren　He Anzhou

Abstract

This paper studies the enumeration of cycle of the 5×n rectangular Lattied graph an the plah, and thies obtains a formula of the result represented by matrix.

Subjectwords: graph; lattied graph; cycle; cycle of the planar lattied graph/ enumeration