第9卷 无锡轻工业学院学报 Vol.9
第3期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1990 No.3

迁移理论中一类具扰动的Chandrasekhar方程解的存在性定理

曹菊生

(基础课部)

摘要 本文对迁移理论中一类具扰动的Chandrasekhar方程在L[0.1]中解的存在性和逼近问题作了某些研究。本文结果改进和推广了文[1—6]中的某些结果。

主题词 Chandrasekhar方程；扰动；解；不动点

在辐射迁移、中子迁移、气体分子动力学中，下面的一类通常称为Chandrasekhar H—方程的非线性积分方程起着极为重要的作用：

$$H(t)=1+H(t)\int_0^1 \frac{t\Psi(s)}{t+s}H(s)\mathrm{d}s \tag{1}$$

在文[1—5]中，作者们考虑了在一定条件下，在$C[0,1]$中解的存在性和逼近问题。1978年，Hively在文[6]中给出了下面一类非线性积分方程在某些条件下在$L'(\mu)$单位球上解的存在性和唯一性：

$$u(t)=\Psi(t)+u(t)\int_0^1 K(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

本文的目的是在适当的条件下，讨论下面一类具有扰动的Chandrasekhar方程

$$u(t)=\Psi(t)+u(t)\int_0^1 K(t,s)u(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 P(t,s,u(t)u(s))\mathrm{d}s \tag{3}$$

在$L[0,1]$中正解的存在性问题及逼近问题，本文的结果改进和推广了文[1—6]中的某些结果。

以后我们用$L^p[0,1]$表$[0,1]$上的P幂可积函数$X(t)$所组成的Banach空间，其范数$\|\cdot\|^P$定义为：

$$\|u\|_P=\left(\int_0^1 |u(t)|^P\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

我们用$L^P{}_+[0,1]$表$L^P[0,1]$中的非负函数锥，当$P>1$时，易知

$$L^P[0,1]\subset L'[0,1]=L[0,1]$$

定义1[7]，设(X,d)是一完备的度量空间，A是X的任一有界集，称

本文1989年12月9日收到

$$\gamma_x(A)=inf\{\varepsilon\geqslant 0：A\text{可被有限个直径}\leqslant\varepsilon\text{的集合覆盖}\}$$

为A的非紧性测度。如果f是映X中的有界集为X的有界集的连续函数，若存在某一数$k\in[0,\infty]$使得对一切有界集$A\subset X$有

$$\gamma_x(f(A))\leqslant k\gamma_x(A)$$

则称f为X上的k-集压缩映象。特别是当$0\leqslant k<1$时，则称f为X上的严格集压缩映象。

引理1[2]．设A是Banach代数B的子集，设$T:A\to B$是由下式定义的算子：

$$Tx=x_0+Kx\cdot Lx$$

其中$x_0\in B$；$L:A\to B$满足$\|Lx-Ly\|\geqslant b\|x-y\|$，$\forall x,y\in A$而$b\geqslant 0$是某一非负常数。$K:A\to B$是紧算子。设$a=\sup\limits_{X\in A}\|kx\|<\infty$，如果$ab<1$，则$T:A\to B$是严格集压缩映象。

引理2[8]，设A是Banach空间X上的有界闭凸集，$T:A\to A$严格集压缩映象，则T在A中不动点。

现在我们来考虑方程(3)，其中$\psi(t)\in L[0,1]$，$K(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续，两者都是给定的。我们把方程(3)写成下面的形式

$$u(t)=\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u(t),u(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,s)u(s)ds} \tag{4}$$

或Tu＝Ku·Lu，其中K、L分别定义为：

$$Ku(t)=\frac{1}{1-\int_0^1 K(t,s)u(s)ds}=\frac{1}{1-K_1u(t)} \tag{5}$$

$$K_1u(t)=\int_0^1 K(t,s)u(s)ds \tag{6}$$

$$Lu(t)=\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u(t),u(s))ds \tag{7}$$

于是(4)式可写成$u=Tu$，故求解方程(3)等价于求T的不动点。

引理3，假定$K(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续，则(6)中K_1是映L[0,1]到C[0,1]的紧映象。

证：$\forall\varphi\in L[0,1]$，我们记$M=\sup\limits_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}|K(t,s)|$，有

$$|K_1\varphi(t)|=|\int_0^1 K(t,s)\varphi(s)ds|\leqslant M\|\varphi\|_1$$

$$|K_1\varphi(t)-K_1\varphi(t')|=\left|\int_0^1[K(t,s)-K(t',s)]\varphi(s)ds\right|\leqslant\int_0^1|K(t,s)-K(t',s)|\varphi(s)ds$$

因为$K(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续，所以$K(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上一致连续，所以由上式我们知道$K_1\varphi\in C[0,1]$，即K_1映$L[0,1]$到$C[0,1]$．对L[0,1]中任何有界集A，我们可看出$\{K_1\varphi,\varphi\in A\}$是一致有界且等度连续的，立即由此得$K_1$是紧映象。

定理1．假定方程(3)中P,K,Ψ满足下列条件：

$A1$：$K(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上非负连续，$M=\sup|K(t,s)|$。

$A2$：P：$[0,1]\times[0,1]\times R^+\times R^+\to R$，且 $t,s\in[0,1]$

$$|P(t,s,u_1,v_1)-P(t,s,u_2,v_2)|\leqslant\gamma_1|u_1-u_2|+\gamma_2|v_1-v_2|$$

$$(\forall t,s\in[0,1],\ u_i,v_i\in R^+,\ i=1,2)$$

$$\sup_{t,s\in[0,1],u,v\in R^+}|P(t,s,u,v)|\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{4M}$$

$A3$：$\Psi(t)\in L[0,1]$，$\Psi(t)\geqslant0$，$t\in[0,1]$，且$\beta=\int_0^1\Psi(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{4M}-\varepsilon$

则对任意满足下之条件的$\delta>0$和$\gamma>0$：

$A4$：$\frac{1}{\delta}(\gamma_1+\gamma_2)<1$

$A5$：$\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2$，其中

$$\delta_1=\frac{1-\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2},\quad \delta_2=\frac{1+\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2} \tag{8}$$

$A6$：$\gamma_1\leqslant\gamma\leqslant\gamma_2$，其中

$$\gamma_1=\frac{1-\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2M},\quad \gamma_2=\frac{1+\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2M} \tag{9}$$

在集D_δ^γ中存在方程(3)的一个解，其中

$$D_\delta=\{u(t)\in L_+[0,1],\ \int_0^1\int_0^1K(t,s)u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant1-\delta\}$$

$$D^\gamma{}_\delta=\{u(t)\in D_\delta,\quad \|u\|_1\leqslant\gamma\}$$

证：由引理3我们可知K_1：$L[0,1]\to C[0,1]$是紧的，所以由(5)式可知K：$L[0,1]\to C[0,1]$是紧的且连续，而且

$$\underset{u(t)\in D^\gamma{}_\delta}{\mathrm{Sup}}|Ku(t)|\leqslant\frac{1}{\delta} \tag{10}$$

$$\|Lu_1(t)-Lu_2(t)\|_1=\int_0^1\left|\int_0^1[P(t,s,u_1(t),u_1(s))-P(t,s,u_2(t),u_2(s))]\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant(\gamma_1+\gamma_2)\ \|u_1-u_2\|_1\qquad\forall u_1,\ u_2\in D^\gamma{}_\delta \tag{11}$$

由(10)、(11)、(A_4)及引理1可知T是严格集压缩映象。

现在我们来证明对任意$u\in D^\gamma{}_\delta$有$Tu(t)\in D^\gamma{}_\delta$，即证下列两不等式成立：

$$(B1)\quad \int_0^1\int_0^1K(t,s)\left[\frac{\Psi(s)+\int_0^1P(s,v,u(s),u(v))\mathrm{d}v}{1-\int_0^1K(s,v)u(v)\mathrm{d}v}\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant1-\delta$$

(B2) $\|Tu\|_1 \leqslant \gamma$

设(B1)式不成立，则有$u\in D^{\gamma}{}_{\delta}$，使

$$\int_0^1\int_0^1 K(t,s)\left[\frac{\Psi(s)+\int_0^1 P(s,v,u(s),u(v))\,dv}{1-\int_0^1 K(s,v)u(v)\,dv}\right]ds\,dt>1-\delta \tag{12}$$

但因上式左端

$$\leqslant\frac{1}{\delta}M(\beta+\varepsilon)$$

由(12)式立即可得　$\delta^2-\delta+M(\beta+\varepsilon)>0$

由条件(A3)得 $\Delta=1-4M(\beta+\varepsilon)\geqslant 0$，因而有

$$\begin{cases}\delta>\dfrac{1+\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2}\ \text{或}\ \delta<\dfrac{1+\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2} & \text{当 }\Delta>0\\ \delta\neq\frac{1}{2} & \text{当 }\Delta=0\end{cases}$$

这与关于δ的假设条件相矛盾。由此矛盾知(B1)是成立的。

下证(B2)式成立，设相及有 $\|Tu\|_1>\gamma$

但因

$$\|Tu\|_1=\int_0^1\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u(t),u(s))\,ds}{1-\int_0^1 K(t,s)u(s)\,ds}\,dt\leqslant\frac{\beta+\varepsilon}{1-M\gamma}$$

立即可得

$$M\gamma^2-\gamma+(\beta+\varepsilon)>0$$

故应有

$$\begin{cases}\gamma<\dfrac{1-\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2M}\ \text{或}\quad \gamma>\dfrac{1+\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2M} & \text{当 }\Delta>0\\ \delta\neq\dfrac{1}{2M} & \text{当 }\Delta=0\end{cases}$$

这又与定理关于γ的假定相矛盾。由此矛盾得知(B2)式成立，因而得证T是$D^{\gamma}{}_{\delta}$到$D^{\gamma}{}_{\delta}$的映象。由引理2，在$D^{\gamma}{}_{\delta}$中存在T的不动点$u_*(t)$，所以$u_*(t)$是方程(3)在$L_+[0,1]$中的非负解。

定理2，设P、K、Ψ满足定理1中的条件(A1)(A2)、(A3)，再设$P(t,s,u,v)$关于u,v是不减的，且满足条件：

$$\int_0^1[K(t,s)\Psi(t)\Psi(s)+P(t,s,\Psi(t)\Psi(s))]\,ds\geqslant 0\quad\forall t\in[0,1] \tag{13}$$

设$u_0(t)=\Psi(t)>0$，并定义$u_{n+1}=Tu_n, n=0,1,2,\cdots$，则序列$[u_n]_{n=0}^{\infty}\subset D^{\gamma}{}_{\delta}$致收敛于方程(3)的一个解$u_*(t)\in D^{\gamma}{}_{\delta}$，其中δ和γ分别满足定理1中的条件(A4)，(A5)，(A6)。

证：易于证明$\Psi(t)\in D^{\gamma}{}_{\delta}$。事实上，$\beta\leqslant\gamma$，否则$\beta>\gamma\geqslant\gamma_1$，即

$$\beta>\frac{1-\sqrt{1-4M(\beta+\varepsilon)}}{2M}$$

因而$-4M\varepsilon \geqslant 4M^2\beta^2$，这是不可能的。另外我们有

$$\int_0^1\int_0^1 K(t,s)\Psi(s)\,ds \leqslant M\beta \leqslant 1-\delta_2 \leqslant 1-\delta \tag{14}$$

由定理1可知T是$D^{\gamma}{}_{\delta}$到$D^{\gamma}{}_{\delta}$的严格集压缩映象，因而有$A=\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\subset D^{\gamma}{}_{\delta}$，而且存在数$k\in(0,1)$，使得

$$\gamma_L(T(A)) \leqslant k\gamma_L(A) \tag{15}$$

其中γ_L表$L[0,1]$上的非紧性测度。另因$A=\{u_0\}\cup T(A)$且有

$$\gamma_L(A)=\max\{\gamma_L(\{u_0\}),\gamma_L(T(A))\}=\gamma_L(T(A)) \tag{16}$$

由(15)、(16)可推得$\gamma_L(A)=0$，即A是$D^{\gamma}{}_{\delta}$中的相关紧集，故存在$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$中的一个子序列一致收敛于某一点$u_*\in D^{\gamma}{}_{\delta}$。下证整个序列$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$在$D^{\gamma}{}_{\delta}$中一致收敛于$u_*$，我们利用递推法。

由(13)我们可得

$$\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,\Psi(t),\Psi(s))\,ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\Psi(s)\,ds} \geqslant \psi(t)$$

因而我们有$u_1(t)\geqslant u_0(t)$。现在假定$u_n\geqslant u_{n-1}$，我们来证明$u_{n+1}\geqslant u_n$。考虑

$$Tu_n=u_{n+1}=\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_n(t)u_n(s))\,ds}{1-\int_0^1 K(t,s)u_n(s)\,ds}$$

而且

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_n(t),u_n(s))\,ds}{1-\int_0^1 K(t,s)u_n(s)\,ds}-\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_{n-1}(t),u_{n-1}(s))\,ds}{1-\int_0^1 K(t,,s)u_{n-1}(s)\,ds}$$

$$=\frac{E}{N}$$

其中

$$E=(1-\int_0^1 K(t,s)u_n(s)\,ds)(1-\int_0^1 K(t,s)u_{n-1}(s)\,ds)$$

$$N=\int_0^1[P(t,s,u_n(t),u_n(s))-P(t,s,u_{n-1}(t),u_{n-1}(s))]\,ds+\int_0^1 K(t,s)\Psi(t)[u_n(s)-u_{n-1}(s)]\,ds-\int_0^1 P(t,s,u_n(t),u_n(s))\,ds\cdot\int_0^1 K(t,s)u_{n-1}(s)\,ds+\int_0^1 P(t,s,u_{n-1}(t),u_{n-1}(s))\,ds\cdot\int_0^1 K(t,s)u_n(s)\,ds$$

因$u_n(t),u_{n-1}(t)\in D^{\gamma}{}_{\delta}$，故$E>0$。另外，直接计算表明：

$$N=(\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_{n-1}(t),u_{n-1}(s))\,ds)\cdot\int_0^1 K(t,s)[u_n(s)-u_{n-1}(s)]\,ds$$

$$+\left(1-\int_0^1 K(t,s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s\right)\cdot\int_0^1[P(t,s,u_n(t),u_n(s))-P(t,s,u_{n-1}(t),u_{n-1}(s))]\mathrm{d}s \qquad (17)$$

由P的单调性假设及归纳法的假定，(17)式的右端是非负的。又因

$$u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant u_0 = \Psi(t)$$

其中

$$u_n(t)=\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_{n-1}(t),u_{n-1}(s))\mathrm{d}s}{1-\int_0^1 K(t,s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s}$$

故由上式及(14)式可得

$$\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_{n-1}(t),u_{n-1}(s))\mathrm{d}s \geqslant \Psi(t)\left[1-\int_0^1 K(t,s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s\right] \geqslant \delta\,\Psi(t)>0$$

因而(17)式右端第一项也是非负的，立即可得$u_{n+1}\geqslant u_n$

从而$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$在D^{γ}_{δ}中一致收敛于$u_*(t)\in D^{\gamma}_{\delta}$。现让下式两端中$n\to\infty$：

$$u_{n+1}(t)=\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_n(t),u_n(s))\mathrm{d}s}{1-\int_0^1 K(t,s)u_n(s)\,\mathrm{d}s}$$

由积分和极限的性质可知

$$u_*(t)=\frac{\Psi(t)+\int_0^1 P(t,s,u_*(t),u_*(s))\mathrm{d}s}{1-\int_0^1 K(t,s)u_*(s)\mathrm{d}s}$$

这表明$u_*(t)$是方程(3)的非负解。

注：因为$C[0,1]\subset L[0,1]$，让$P=0$，我们可看出定理1和定理2改进和推广了文[1—6]中的一些结果。

参考文献

1 Chandrasekhar S.Radiative Transfer Dover.New York：1960

2 Legget R W. On Certain Nonlinear Integral Equations. J Math Anal Appl, 1977; 57:462—468

3 A New Approach to the H-equation of Chandrasekhar. SIAM Math Anal 1976; 7, 4:542-550

4 Stuart C A. Existence Theorems for a Class of Nonlinear Integral Equations, Math Z.1974；137：49—66.

5 Busbridge I W.On the H—function of Chandrasekhar Quart. J Math

Qxford Ser, 1957; 8: 133—140
6 Hively G A.On a Class of Nonlinear Integral Equatious Arising in Transport Theory. SIAM Math Anal, 1978; 9, 5:797—792.
7 Kuratowski C.Sur les espaces Complets. Fund Math, 1930; 15: 301—309
8 Darbo G.Punti Uniti in Transformationi a Codominio Non Compatto, Rend Sem Mat Univ Padova, 1955; 24: 84—92

Existence Theorems for A Class of Chandrasekhar Equation With Perturbation in Transport Theory

Cao Juesheng

(Dept. of Found. Couse)

Abstract We prove existence and approximation theorems of positive solutions in the space L[0,1]of integral equation of Chandrasekhar with perturbation.The results presented in this paper improve and extent some recent results in[1-6]

Subjectwords Chandrasekhar equation; Perturbation; Solution; Fixed point