第9卷 无锡轻工业学院学报 Vol.9
第4期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1990 No.4

微分中值定理的推广

杨志荣

(基础课部)

摘要 本文把微分中值定理推广到开区间和无穷区间上。

关键词 函数；极限；导数；中值

0 引 言

利用导数来研究函数本身的性态时，我们经常用到Rolle定理、Lagrange定理和Cauchy定理。但由于这几个中值定理都要求函数在有限闭区间内具有连续的条件，因此使用起来很感不便。文[1]曾把Rolle定理推广到开区间和无穷区间上，本文在此基础上，进一步推广了Rolle定理，Lagrange定理和Cauchy定理。

1 推广的微分中值定理

定理1(Rolle定理的推广1) 如果函数$f(x)$在有穷或无穷区间(a, b)内可导，$f(a+0)$及$f(b-0)$存在相等，那末在(a, b)内至少有一点ξ，使$f'(\xi)=0$

证：当(a, b)为有穷区间时，令

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(a, b) \\ f(a+0) & x=a \\ f(b-0) & x=b \end{cases}$$

显然$F(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，且$F(a)=F(b)$。由Rolle定理，在(a, b)内至少有一点ξ，使$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=0$。

当$a=-\infty$，$b=+\infty$时，令

$$g(t)=f(\mathrm{tg}t) \qquad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

显然$g(t)$在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内可导，且

$$g\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=g\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

所以，在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内至少有一点$t_0$，使

本文1990年3月29日收到。

$$g'(t_o)=f'(\xi)\sec^2 t_o=0,\text{ 其中}\xi=\operatorname{tg} t_o$$

由于$\sec^2 t_o\neq 0$，所以$f'(\xi)=0$。

当a为有限数，$b=+\infty$时，取$b_o>\max(a,\ 0)$　令

$$g(t)=f\left[\frac{(b_o-a)t}{b_o-t}\right]$$

显然$g(t)$在$(a,\ b_o)$内可导，且$g(a+0)=g(b_o-0)$，于是，在$(a,\ b_o)$内至少有一点t_o，使

$$g'(t_o)=f'(\xi)\frac{b_o(b_o-a)}{(b_o-t_o)^2}=0,\text{ 其中}\xi=\frac{(b_o-a)t_o}{b_o-t_o},$$

显然 $a<\xi<+\infty$，由于 $\dfrac{b_o(b_o-a)}{(b_o-t_o)^2}>0$，所以$f'(\xi)=0$，

当$a=-\infty$，b为有限数时，可类似证明。

定理2（Rolle定理的推广2）　如果函数$f(x)$在有穷或无穷区间$(a,\ b)$内可导，且

$f(a+0)=f(b-0)=+\infty$或$f(a+0)=f(b-0)=-\infty$，那未在$(a,\ b)$内至少有一点ξ，使$f'(\xi)=0$

证　当$f(a+0)=f(b-0)=+\infty$时，令

$$g(x)=e^{-f(x)}$$

显然$g(x)$在$(a,\ b)$内可导，且$g(a+0)=g(b-0)=0$，于是由定理1，在$(a,\ b)$内至少有一点ξ，使

$$g'(\xi)=-e^{-f(\xi)}\cdot f'(\xi)=0.$$

因为$e^{-f(\xi)}\neq 0$，所以$f'(\xi)=0$.

当$f(a+0)=f(b-0)=-\infty$时可类似证明。

下面将在有限区间$(a,\ b)$内推广Lagrange中值定理和Cauchy中值定理。

定理3（Lagrange中值定理的推广）　如果函数$f(x)$在有限区间$(a,\ b)$内可导，且$f(a+0)$及$f(b-0)$都存在，那未在$(a,\ b)$内至少有一点ξ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{b-a}$$

证：　令

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(a,\ b)\\ f(a+0) & x=a\\ f(b-0) & x=b\end{cases}$$

显然$F(x)$在$[a,\ b]$上连续，在$(a,\ b)$内可导。由Lagrange中值定理，在$(a,\ b)$内至少有一点ξ，使

$$F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a},\quad\text{即}\quad f'(\xi)=\frac{f(b-0)-f(a+0}{b-a}$$

定理4（柯西中值定理的推广）如果函数$f(x)$及$g(x)$在有限区间$(a,\ b)$内可导，$g'(x)$在$(a,$

b)内处处不为零，且$f(a+0)$，$f(b-0)$，$g(a+0)$，$g(b-0)$都存在，那末在(a, b)内至少有一点ξ，使

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{g(b-0)-g(a+0)}$$

证：由定理3在(a, b)内至少有一点η，使

$$g(b-0)-g(a+0)=g'(\eta)(b-a)$$

因为$g'(\eta)\neq 0$，$b-a\neq 0$，所以$g(b-0)-g(a+0)\neq 0$。
作

$$\varphi(x)=f(x)-f(a+0)-\frac{f(b-0)-f(a+0)}{g(b-0)-g(a+0)}[g(x)-g(a+0)]$$

显然$\varphi(x)$在(a, b)内可导，且$\varphi(a+0)=\varphi(b-0)=0$，由定理1，在$(a, b)$内至少有一点$\xi$，使$\varphi'(\xi)=0$，即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b-0)-f(a+0)}{g(b-0)-g(a+0)}。$$

2 应用举例

应用定理4可很方便地证明罗必塔法则，

定理：设1°

$$\lim_{x\to a}f(x)=0，\quad \lim_{x\to a}g(x)=0。$$

2° $f(x)$及$g(x)$在点a的某邻域内可导，（点a可除外），且$g'(x)\neq 0$。

3° $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大。

那末

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

证：对于a的右邻域内任一点$x(\neq a)$，$f(x)$和$g(x)$在(a, x)内可导，且$g'(x)\neq 0$。
由定理4，在(a, x)内至少有一点ξ，使

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x-0)-f(a+0)}{g(x-0)-g(a+0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

当$x\to a$时，$\xi\to a$，所以

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}，\text{即}\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

同理可证 $$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

所以 有 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

应用定理1可以讨论函数的零点。

例：证明契比雪夫-拉盖尔多项式

$$Ln(x)=e^{x}\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x^{n}\cdot e^{-x})\quad \text{有n个正零点}$$

证：记$f(x)=x^{n}\cdot e^{-x}$，显然$f(0)=f(+\infty)=0$，由定理1存在$x_1^{(1)}\in(0,\ +\infty)$，使$f'(x_1^{(1)})=0$

对$k<n$，设$f^{(k)}(x)$有k个正零点$x_i^{(k)}(i=1,2,\cdots k)$且

$$0<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}<\cdots<x_k^{(k)}<+\infty$$

则因$f^{(k)}(x)=x^{n-k}P_k(x)e^{-x}$，其中$P_k(x)$是$k$次多项式，有$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(+\infty)=0$，再由定理1，存在

$$x_1^{(k+1)}\in(0,\ x_1^{(k)}),\ x_2^{(k+1)}\in(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}),\ \cdots\cdots,\ x_{k+1}^{(k+1)}\in(x_k^{(k)},\ +\infty)$$

使 $f^{(k+1)}(x_i^{(k+1)})=0,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1)$

于是由数学归纳法知：$f^{(n)}(x)$有n个正零点，而e^{x}恒不为零，所以$Ln(x)$有n个正零点。证毕。

致 谢

在本文写作过程中得到数学教研室贯荣昌副教授的热情帮助，谨表谢意。

参 考 文 献

1 孙本旺等. 数学分析中的典型例题和解题方法. 湖南科学技术出版社，1981

Generalize the Use of Differential Middle Value Theorem

Yang Zirong

(Dept. of Found. Couse)

Abstruct This paper generalizes the theorem of differential middle value to both open region and unbounded region.

Keywords Function; Limit; Differentiation; Middle value