第10卷　　无锡轻工业学院学报　　Vol.10
第2期　　JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY　　1991　No.2

概率A—proper映象广义拓扑度及其不动点定理

曹菊生　　　林颐锜
（无锡轻工业学院）　　（南京师范大学）

摘要　本文拟在概率赋范线性空间$(E、F、\Delta)$，$\sup\limits_{t<1}\Delta(t,t)=1$，且具有可列基的空间上建立概率A-proper映象拓扑度及其相应的不动点定理。作为特例，我们讨论了在上述空间情形的概率紧连续场的拓扑度。

关键词　概率逼近格式；概率A-proper映象；拓扑度；不动点

0　引　　言

我们知道，在赋范线性空间中，A-proper 映象是重要的较广的一类非紧性映象，它有一定的应用，因此人们对其广义拓扑度作了较为深入的讨论。同样。基于有限维逼近这一思想以及某些随机微分方程的需要，我们讨论概率赋范性空间$(E、F、\Delta)$，$\sup\limits_{t<1}\Delta(t,t)=1$，且具有可列基情形下的概率A-proper映象，建立其广义度，并利用拓扑度来讨论一些不动点定理，这无疑是一件十分有意义的事。

在实际中，概率紧连续场将是很有用的一种映象，作为概率A-proper映象的特例，我们考虑了概率紧连续场的拓扑度，得到了几个有趣的结果。

本文均假设E_1、E_2为完备M-PN空间(E_j, F_j, Δ_j)，且$\sup\limits_{t<1}\Delta_j(t,t)=1$，$j=1,2$，不作特别说明的符号均见文[1]。

1　基本概念

定义1.　E_1、E_2为完备M-PN空间，分别存在E_1、E_2的一串有限维子集，$X_n, Y_n(n=1,2,\cdots)$其中$\dim X_n=\dim Y_n$，$(n=1,2,\cdots)$，又存在连续映象序列$\{P_n\}$，$\{Q_n\}$，其中P_n，$X_n\to E$，Q_n：$E_2\to Y_n$则称$P=\{X_n, P_n; Y_n, Q_n\}$为E_1到E_2的概率逼近格式。

定义2. 设$P=\{X_n, P_n, Y_n; Q_n\}$为E_1到E_2的一个概率逼近格式，Ω是E_1中概率开集，映象T：$\overline{\Omega}\subset E_1\to E_2$：连续，令$\Omega_n=P_n^{-1}(\Omega)(n=1,2,\cdots)$，如果从$X_{n_k}\in\overline{\Omega}_{n_k}$满足

本文1989年11月30日收到

$$F^{(2)}_{Q_{n_k}TP_{n_k}(x_{kn})-Q_{n_k}y}(t)\to H(t),\ k\to\infty$$

其中$y\in E_2$，能推出$\{X_{n_k}\}$必有收敛子例$\{X_{n_{ki}}\}$存在，即存在$X\in\overline{\Omega}$，使

$$F^{(1)}_{P_{nki}x_{nki}-x}(t)\to H(t)\qquad (n_{K_i}\to\infty)$$

而且$Tx=y$，则称映象T关于概率逼近格式P是概率A-proper的。

为方便起见，我们记$PA(\overline{\Omega})$为所有$\overline{\Omega}$到E_2的概率A-proper映象全体，又记$T_n=Q_nTP_n$。

注1：显然当E_1、E_2具有可列基时，这样的概率逼近格式Γ是存在的。

2 概率A--proper映象的拓扑度

定义3. 设Γ是E_1到E_2的一个概率逼近格式，Ω是E_1中概率开集，$T\in PA(\overline{\Omega})$，$p\in E_2/T(\partial\Omega)$，用$Z$表整数集，$Z^*=ZU\{-\infty,\ +\infty\}$，我们定义广义拓扑度为：

$$\text{M-PNDeg}(T,\Omega,p)\triangleq\{\gamma\in Z^*:\text{存在}\{n\}\text{的子列}\{n_k\},\text{使}\deg(T_{n_k},\ \Omega_{n_k},\ Q_{n_k}p\to\gamma\}$$

其中$\text{dep}(T_{n_k},\ \Omega_{n_k},\ Q_{n_k}p)$为拓扑空间的有维Brouwer度。易知，当$n$充分大($n>N$)时，必有$Q_np\overline{\in}T_n(\partial\Omega_n)$。否则，则存在$x_{n_k}\in\partial\Omega_{n_k}$，使$T_{n_k}x_{n_k}=Q_{n_k}p$，从而，根据概率A-proper性知，存在$\{x_{n_k}\}$的子例$\{x_{n_k}\}$及$x\in\partial\Omega$，使$Tx=p$，且

$$F^{(1)}_{p_{n_{k^i}}x_{n_{ki}}-x}(t)\to H(t)\qquad (i\to\infty)$$

此与$p\overline{\in}T(\partial\Omega)$相矛盾。从而当$n>N$时，$\deg(T_n,\ \Omega_n,\ Q_np)$有意义，所以M-pNDeg($T$, Ω, p)是Z^*的一个非空子集。

定理1. 概率A-proper映象的广义拓扑度具有下列性质。

a. 可解性：若M-pNDeg(T, Ω, p)$\neq\{0\}$，则方程$Tx=p$在Ω内有解。

b. 同伦不变性：设H: $[0,\ 1]\times\overline{\Omega}\to E_2$连续，并且对每个固定的$t\in[0,\ 1]$，$H(t,\ \cdot)$: $\overline{\Omega}\to E_2$是概率A-proper映象，又设$H(t,\ x)$对于t的连续性关于$x\in\overline{\Omega}$是一致的，$\{Q_n\}$是概率有界集上等度一致连续的，即$\forall\varepsilon>0$，任意B为Y中概率有界集，存在$\delta_C>0$，当$x,y\in B$，且$F^{(2)}_{x-y}(\delta_0)>1-\delta_0$时，对任意$n$有$F^{(2)}_{Q_nY-Q_nx}(\varepsilon)>1-\varepsilon$。另外，$p\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$，$t\in[0,1]$，$h_t(x)=H(t,\ x)$，那末：

$$\text{M-pNDeg}(h_t,\ \Omega,\ p)=\text{M-pNDeg}(h_0,\ \Omega,\ p)\quad\forall t\in[0,\ 1]\tag{1}$$

c. 切除性：设Ω_0是Ω的概率开子集，且$p\overline{\in}T(\overline{\Omega}/\Omega_0)$，则

$$\text{M-pNDeg}(T,\ \Omega,\ p)=\text{M-pNDeg}(T,\ \Omega_0,\ p)\tag{2}$$

d. 广义可加性：设$\Omega^{(1)}$、$\Omega^{(2)}$是Ω的两个互不相交的概率开子集，且$p\overline{\in}T(\overline{\Omega}/(\Omega^{(1)}\cup\Omega^{(2)}))$，则

$$\text{M-pNDeg}(T,\Omega,p)\subset\text{M-pNDeg}(T,\Omega^{(1)},p)+\text{M-pNDeg}(T,\Omega^{(2)},p)\tag{3}$$

当M-pNDeg($T,\Omega^{(1)},p$)，M-pNDeg($T,\Omega^{(2)},p$)中至少有一个是单元素集时，必有等号成立。

$$\text{M-pNDeg}(T,\Omega,p)=\text{M-pNDeg}(T,\Omega^{(1)},p)+\text{M-pNDeg}(T,\Omega^{(2)},p) \qquad (4)$$

证：a. 由于M-pNDeg$(T,\Omega,p)\neq\{0\}$，故必存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，使$\deg(T_{n_k},\Omega_{n_k}Q_{n_k}p)\neq 0$，$k=1,2,\cdots$，于是，存在$x_{n_k}\in\Omega_{n_k}$，使$T_{n_k}x_{n_k}=Q_{n_k}p$，$k=1,2,\cdots$，根据$T$的概率A-proper性知，$\{x_{n_k}\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，$F^{(1)}{}_{p_{n_{ki}}x_{n_{ki}}-x_0}(t)\to H(t)$，$x_0\in\overline{\Omega}$，$Tx_0=p$，由于假定$p\overline{\in}T(\partial\Omega)$，故$x_0\in\Omega$。

b. 任给$t_0\in[0,1]$，下证必存在$\delta_0>0$，使得对任何$0<|t-t_0|<\delta_0$的大，恒有$N(t)>0$存在，使

$$Q_np\overline{\in}Q_nh_sp_n(\partial\Omega_n),\ \forall s\in[t_0,t],\ n>N(t) \qquad (5)$$

事实上，若不然，则存在$t_{n_k}\to t_0(t_{n_k}\neq t_0)$，$S_{n_k}\in[t_0,t_{n_k}]$，使$Q_{n_k}p\in Q_{n_k}hs_{n_k}P_{n_k}(\partial\Omega_{n_k})$，$k=1,2,\cdots$，从而，存在$x_{n_k}\in\partial\Omega_{n_k}$，使得

$$Q_{n_k}hs_{n_k}P_{n_k}(x_{n_k})=Q_{n_k}p,\qquad k=1,2\cdots \qquad (6)$$

由(6)式及条件(b)，对任意$\varepsilon>0$，及条件(b)中$\delta_0>0$，存在K，$k>K$时，都有

$$F^{(2)}{}_{H(t_0,x)-H(S_{n_k},x)}(\delta_0)>1-\delta_0\qquad \forall x\in\overline{\Omega}$$

由$\{Q_n\}$等度一致连续性得

$$F^{(2)}{}_{Q_{n_k}h_{t_0}p_{n_k}x_{n_k}-Q_{n_k}p}(\varepsilon)=F^{(2)}{}_{Q_{n_k}h_{t_0}p_{n_k}x_{n_k}-Q_{n_k}h_{s_n}p_{n_k}x_{n_k}}(\varepsilon)>1-\varepsilon$$

由ε的任意性，便得

$$F^{(2)}{}_{Q_{n_k}h_{t_0}p_{n_k}x_{n_k}-Q_{n_k}p}(t)\to H(t),$$

从而，根据h_{t_0}的概率A-proper性知，存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_{ki}}\}$，

$$F^{(1)}{}_{p_{n_{ki}}x_{n_{ki}}-x_0}(t)\to H(t),\ h_{t_0}(x_0)=p,$$

而$x_0\in\partial\Omega$，此与假定$p\overline{\in}h_{t_0}(\partial\Omega)$相矛盾，于是(5)式成立，根据有限维的Brouwer 度的同伦性不变，可得

$\deg(Q_nh_tp_n,\Omega_np)=\deg(Q_nh_{t_0}p_n,\Omega_n,Q_np)$ $\forall n>N(t)$，$|t-t_0|<\delta_0$，由此可知，

M-pNDeg$(h_t,\Omega,p)=$M-pNDeg(h_{t_0},Ω,p) $\forall 0<|t-t_0|<\delta$，再利用的限维覆盖定理，即知当$t\in[0,1]$时，M-pNDeg(h_t,Ω,p)保持不变。

c. 令$\Omega_n^{(0)}=P_n^{-1}(\Omega_0)$，今证必存在$N>0$，使

$$Q_np\overline{\in}T_n(\overline{\Omega}_n/\Omega_n^{(0)})\qquad\forall n>N \qquad (7)$$

事实上，若不然，则存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，$x_{n_k}\in\overline{\Omega}_{n_k}/\Omega_{n_k}^{(0)}$，$p_{n_k}x_{n_k}\in\overline{\Omega}/\Omega_0$使

$$T_{n_k}x_{n_k}=Q_{n_k}p \qquad (8)$$

于是根据T的概率A-proper性知，$\{x_{n_k}\}$有收敛子列$\{x_{n_{k_i}}\}$，即存在x_0，使

$$F^{(1)}_{p_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}} - x_0}(t) \to H(t),\ Tx_0 = p,$$

由于$\overline{\Omega}/\Omega_0$是概率闭集，$x_0 \in \overline{\Omega}/\Omega_0$，此与假设$p \overline{\in} T(\overline{\Omega}/\Omega_0)$相矛盾，故(7)式成立，由(7)式知

$$\deg(T_n, \Omega_n, Q_n p) = \deg(T_n, \Omega_n^{(0)}, Q_n p) \qquad \mathrm{A}n > N$$

从而(2)式成立。

d. 令$\Omega_n^{(1)} = p_n^{-1}(\Omega^{(1)})$，$\Omega_n^{(2)} = p_n^{-1}(\Omega^{(2)})$，则$\Omega_n^{(1)}$，$\Omega_n^{(2)}$是$\Omega_n$的而个互不相交的($X_n$中的)概率开子集。下证，必存在$N>0$，使

$$Q_n p \overline{\in} T_n(\overline{\Omega}_n/(\Omega_n^{(1)} \cup \Omega_n^{(2)})) \qquad \forall n > N \tag{9}$$

事实上，若不然，则存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，$x_{n_k} \in \overline{\Omega}_{n_k}/(\Omega_{n_k}^{(1)} \cup \Omega_{n_k}^{(2)})$，使$T_{n_k} x_{n_k} = Q_{n_k} p$，$k=1,2,\cdots$，于是，根据$T$的概率A-proper性知，$\{x_{n_k}\}$有收敛子列$\{x_{n_{k_i}}\}$，及存在$x_0 \in E$，

$$F^{(1)}_{p_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}} - x_0}(t) \to H(t),\ Tx_0 = p,$$

由于$\overline{\Omega}/(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$是概率闭集，故$x \in \overline{\Omega}/(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$，此与$p \overline{\in} T(\overline{\Omega}/(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$相矛盾，故(9)式成立，由(9)式知，

$$\deg(T_n, \Omega_n, Q_n p) = \deg(T_n, \Omega_n^{(1)}, Q_n p) + \deg(T_n, \Omega_n^{(2)}, Q_n p) \quad n > N \tag{10}$$

任给$\gamma \in$ M-pNDeg(T, Ω, p)，则存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，使

$$\deg(T_{n_k}, \Omega_{n_k}, Q_{n_k} p) \to \gamma \tag{11}$$

显然，存在$\{n_k\}$的子列$\{n_{k_i}\}$，使

$$\deg(T_{n_{k_i}}, \Omega_{n_{k_i}}^{(1)}, Q_{n_{k_i}} p) \to \gamma_1 \in \text{M-pNDeg}(T, \Omega^{(1)}, p) \tag{12}$$

又显然存在$\{n_{k_i}\}$的子列(不妨设本身)，使

$$\deg(T_{n_{k_i}}, \Omega_{n_{k_i}}^{(2)}, Q_{n_{k_i}} p) \to \gamma_2 \in \text{M-pNDeg}(T, \Omega^{(2)}, p \tag{13}$$

由(10)、(11)、(12)、(13)式得

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \in \text{M-pNDeg}(T, \Omega^{(1)}, p) + \text{M-pNDeg}(T, \Omega^{(2)}, p)$$

由γ的任意性便得(3)式。

另外，设M-pNDeg$(T, \Omega^{(1)}, p)$与M-pNDeg$(T, \Omega^{(2)}, p)$中至少有一个是单元索集，如如设M-pNDeg$(T, \Omega^{(1)}, p) = \{a\}$，则显然

$$\deg(T_n, \Omega_n^{(1)}, Q_n p) \to a \qquad (n \to \infty) \tag{14}$$

这时，若$\gamma \in$ M-pNDeg$(T, \Omega^{(1)}, p)$ + M-pNDeg$(T, \Omega^{(2)}, p)$，则$\gamma = a + \gamma_2$，且存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，使

$$\deg(T_{n_k}, \Omega_{n_k}^{(2)}, Q_{n_k} p) \to \gamma_2 \qquad (k \to \infty) \tag{15}$$

于是由(10)、(14)、(15)三式知

$$\deg(T_{n_k},\Omega_{n_k},Q_{n_k}p)\rightarrow a+\gamma_2=\gamma$$

故$\gamma\in$M-pNDeg(T,Ω,p)，由此可知

$$\text{M-pNDeg}(T,\Omega^{(1)},p)+\text{M-pNDeg}(T,\Omega^{(2)},p)\subset\text{M-pNDeg}(T,\Omega,p) \tag{16}$$

由(16)式和(3)式知(4)式成立。

容易推广[4]中的其它结果于概率赋范线性空间上，这里不再叙述。

3　概率紧连续场的拓扑度

定义4.　设T：$D\subset E_1\rightarrow E_2$连续，若$T$将$D$中任何概率有界集$S$，映成的象$T(S)$为概率预紧集[3]，则称$T$为概率紧连续算子，且称$f=I-T$为概率紧连续场($E_1=E_2$时)。

定理2.　设空间E具有概率逼近格式，$g=I-T$是概率紧连续场，则g是概率 A-proper映象。

这只要证g是特殊的概率A-proper映象，即设空间E存在一串有维子空间X_n ($n=1,2\cdots$) $Q_n(E)=X_n$，是等度连续的概率有界线性算子。(注：等度连续是多余的。林熙已证明在空间E上概率有界线性算子必是等度连续的，但该文未公开刊出)。且$\forall x\in E$有$F_{Q_nx-x}(t)\rightarrow H(t)$ $(n\rightarrow\infty)$，称这时的E为概率投影完备的。Ω 是 E 中的概率开集，如果对于任意 的点列$x_{n_k}\in\overline{\Omega}_{n_k}$满足

$$F_{Q_{n_k}Tx_{n_k}-Q_{n_k}y}(t)\rightarrow H(t)\qquad (k\rightarrow\infty) \tag{17}$$

能推出点列$\{x_{n_k}\}$必有收敛于x的子列$\{x_{n_{ki}}\}$，称T是特殊的概率A-proper。

上式(17)即$\lim\limits_{k\rightarrow\infty}Q_{n_k}Tx_{n_k}=Q_{n_k}y$[2]，可换成

$$\lim_{k\rightarrow\infty}Q_{n_k}Tx_{n_k}=y \tag{18}$$

因$\lim\limits_{k\rightarrow\infty}Q_{n_k}y=y$，由文[2]中极限运算的定理1，2知(17)与(18)是等价的。又因$\lim\limits_{i\rightarrow\infty}x_{n_{ki}}=x$，$\{Q_n\}$为等度连续的概率有界线性算子，故$\forall\ \varepsilon>0$，$E N$，当$k>N$时

$$F_{Q_{n_k}Tx_{n_k}-Q_{n_k}Tx}(\varepsilon)>1-\varepsilon$$

即$F_{Q_{n_k}Tx_{n_k}-Q_{n_k}Tx}(t)\rightarrow H(t)$　$(k\rightarrow\infty)$与(18)式可得$Tx=y$，因而上述定义与定义2是一致的。

下证：g满足上述特殊的概率A-proper定义。

因(18)式为$F_{x_{n_k}-Q_{n_k}Tx_{n_k}-y}(t)\rightarrow H(t)$ $(k\rightarrow\infty)$，由于T是概率紧连续，故存在$\{x_{n_k}\}$的子列$\{x_{n_{ki}}\}$，使

$$F_{Tx_{n_{k_i}}-y_0}(t)\to H(t)\quad i\to\infty,\ y_0\in E \tag{19}$$

因

$$x_{n_{k_i}}-(y+y_0)=(x_{n_{k_i}}-Q_{n_{k_i}}Tx_{n_{k_i}}-y)+(Q_{n_{k_i}}Tx_{n_{k_i}}-Q_{n_{k_i}}y_0)+(Q_{n_{k_i}}y_0-y_0)$$

上式右边的第1、2、3项分别由(18)、$\{Q_n\}$是等度连续及 $\lim\limits_{i\to\infty}Q_{n_{k_i}}y_0=y_0$知它的极限为 0 ,再由文[2]知左边的极限为0，即 $F_{x_{n_{k_i}}-(y+y_0)}(t)\to H(t)$ $(i\to\infty)$，故g是特殊的概率A-proper映象。

从定理 2 知：定义在上述空间上的概率紧连续场的拓扑度为：

M-pNDeg$(g,\Omega,p)=\{\gamma$：存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，使$\deg(Q_{n_k}g,\ \Omega_{n_k},\ Q_{n_k}p)\to\gamma,\ (k\to\infty)\}$

定理3. 上述概率紧连续场拓扑度是单值的。即M-pNDeg$(g,\Omega,p)=\{\lim\limits_{n\to\infty}\deg(Q_ng,\Omega_n,Q_np)\}$。

证：只要证(a) $\deg(Q_ng,\Omega_n,Q_np)=\deg(Q_ng,\Omega_n,p)$，(b) $\deg(Q_ng,\ \Omega_n,\ p)$与$n$ 选择无关，当n充分大时。

a. 因$\deg(I-Q_nT,\Omega_n,Q_np)=\deg(I-Q_nT+p-Q_np,\Omega_n,p)$，作 $h_t(x)=H(t,x)=(I-Q_nT)x+t(p-Q_np)$，则$H(t,x)$：$[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$连续。下证$p\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$，$n$ 充分大。因若不然。存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$，$x_{n_k}\in\partial\Omega_{n_k}$，$t_{n_k}\in[0,1]$，使

$$(I-Q_{n_k}T)x_{n_k}+t_{n_k}(p-Q_{n_k}p)=p \tag{20}$$

由T是概率紧连续，故存在$\{x_{n_k}\}$的子列仍记为$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0$，$Tx_{n_k}\to y_0$ $(k\to\infty)$，代入(20)式得

$$x_{n_k}=Q_{n_k}(Tx_{n_k}-y_0)+Q_{n_k}y_0-t_{n_k}(p-Q_{n_k}p)+p\to y_0+p)=x_0\in\partial\Omega$$

这与$p\overline{\in}g(\partial\Omega)$相矛盾。由Brouwer度的同伦不变性得：

$$\deg(I-Q_nT,\Omega_n,Q_np)=\deg(I-Q_nT+p-Q_np,\Omega_n,p=\deg(I-Q_nT,\Omega_n,p)$$

至于b由Bronwer度的简化定理易知与n选择无关。因而综合a、b定理得证。

由Brouwer度的标准性容易看出：

推论1. 定义在上述空间上的概率紧连续算子的拓扑度具有标准性。

4 拓扑度在不动点定理方面的应用

Banach空间上算子的不动点定理，如果仅用概率A-proper映象的拓扑度来证明时，这些定理几乎都可推广到M-pN空间上，因篇幅关系这里只证二个定理。

定义5. 设E是概率投影完备的，Ω是E中概率有界概率开集，T：$\overline{\Omega}\to E$

a. 如果对任何$\lambda\geqslant 0$,映象$T+\lambda I$：$\overline{\Omega}\to E$都是概率A-proper的，则称T是概率p_*—紧映

象。

b. 给定$\gamma>0$，如果对任何$\lambda\geqslant\gamma$，映象$T-\lambda I$：$\overline{\Omega}\to E$：都是概率A-proper的，则称T是概率$p\gamma$—紧映象。

我们这段中E均假设具有概率投影完备格式Γ的M-pN空间(E、F、Δ)，其中$\sup\limits_{t<1}\Delta(t,t)=1$。

定理4. 设T：$\overline{\Omega}\to E$是概率p_*—紧映象，$\theta\in\Omega$，设

$$Tx+\lambda x\neq\theta \qquad \forall x\in\partial\Omega,\ \lambda\geqslant 0 \tag{21}$$

那么，必有$x^*\in\Omega$存在，使$Tx^*=\theta$。

证：令$h_t(x)=H(t,x)=(1-t)Tx+tx$，$\forall t\in[0,1]$，$x\in\overline{\Omega}$。显然H：$[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$连续，对固定的$t\in[0,1)$，$h_t=(1-t)T+tI=(1-t)(T+(t/1-t)I)$ 因$(t/1-t)\leqslant 0$，T是概率p_*—紧映象知h_t是概率A-proper映象又由定理2知$h_1=I$也是概率A-proper的。另因$H(t,x)-H(t_o,x)=(t-t_o)(x-Tx)$，而$I-T$在$\overline{\Omega}$上是概率有界，即$\sup\limits_{s\in R}D_{(I-T)(\overline{\Omega})}(s/t-t_o)=1$，故$\forall x\in\overline{\Omega}$有$F_{(t-t_o)(x-Tx)}(s)\to H(s)$一致地成立。下证$\theta\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$ ($\forall t\in[0,1]$)。否则，存在$x_o\in\partial\Omega$，$t_o\in[0,1]$，使$ht_o(x_o)=\theta$，即$(1-t_o)Tx_o+t_ox_o=\theta$，(其中因$x_o\neq\theta$，故$t_o\neq 1$)，所以$Tx_o+t_o/(1-t_o)x_o=\theta$，这与题设矛盾。由同伦不变得

$$\text{M-pNDeg}(T,\Omega,\theta)=\text{M-pNDeg}(I,\Omega,\theta)=\{\lim_{n\to\infty}\deg(Q_nI,\Omega_nQ_n\theta)\}=\{1\}$$

由可解性知，存在$x^*\in\Omega$，使$Tx^*=\theta$

推论2 设T：$\overline{\Omega}\to E$概率紧连续算子，$\theta\in\Omega$，又设$Tx=\mu x$，$x\in\partial\Omega\Rightarrow\mu<1$，则M-pNDeg$(I-T,\Omega,\theta)=\{1\}$。

证：由推论2条件可得(21)式成立，由定理4立即得此结论。

注　本推论是文[5]中的一个结果的推广。

定理5. 设T：$\overline{\Omega}\to E$是概率p_1—紧映象，Ω是凸的，并且$T(\partial\Omega)\subset\overline{\Omega}$，那末，$T$在$\overline{\Omega}$上必具有不动点。

证：不失一般性，设$\theta\in\Omega$(否则取$x_o\in\Omega$，在概率有界概率开集$\Omega_o=\{x\in E$：$x+x_o\in\Omega\}$的概率闭包$\overline{\Omega}_o$上考察映象$T_ox=T(x+x_o)-x_o$即可。这时，$\theta\in\Omega_o$，T_o：$\overline{\Omega}\to E$是概率p_1—紧映象，$T_o(\partial\Omega_o)\subset\overline{\Omega}_o$，由$T_o$在$\overline{\Omega}$中的不动点$x^*$，即得$T$在$\overline{\Omega}$中的不动点$x^*+x_o$。

设T在$\partial\Omega$上无不动点(否则定理已获证)，下证

$$Tx\neq\mu x \qquad \forall x\in\partial\Omega,\ \mu\geqslant 1 \tag{22}$$

事实上，若存在$x_1\in\partial\Omega,\mu_1\geqslant 1$，使$Tx_1=\mu_1x_1$，则$\mu_1>1$，令$x_2=\mu_1x_1=Tx_1$，则由$T(\partial\Omega)\subset\overline{\Omega}$知$x_2\in\overline{\Omega}$，且$x_1=t_1x_2$，$t_1=1/\mu_1$，$0<t_1<1$，因$\theta\in\Omega$，故存在$\gamma>0$，使$N_o(\gamma,\gamma)\subset\Omega$，又因$x_2\in\overline{\Omega}$，故存在$z_1\in\Omega$，满足

$$F_{z_1-x_2}\{(1-t_1)\gamma/t_1\}>1-(1-t_1)\gamma \tag{23}$$

易知$N_{t_1z_1}((1-t_1)\gamma,(1-t_1)\gamma)\subset\Omega$，事实上，若$x\in N_{t_1z_1}((1-t_1)\gamma,(1-t_1)\gamma)$，则$x=t_1z_1+(1-t_1)z$，其中$F_z(\gamma)>1-(1-t_1)\gamma$，故$z\in N_o(\gamma,\gamma)\subset\Omega$，再由$\Omega$的凸性知，$x=t_1z_1+(1-t_1)z\in\Omega$，由于$x_1=t_1x_2$，故$x_1=t_1z_1+t_1(x_2-z_1)$，而由(23)立即可得$t_1z_1+t_1(x_2-z_1)\in N_{t_1z_1}($

$(1-t_1)\gamma$，$(1-t_1)\gamma)\subset\Omega$，从而$x_1\in\Omega$，此与$x_1\in\partial\Omega$相矛盾，因此(22)成立。

令$g=I-T$，由于T是概率p_1—紧的，故对任何$\lambda\geqslant 0$，$g+\lambda I=-(T-(1+\lambda)I)$是概率A-proper的，因此$g$是概率$p_*$紧映象，另外，由(22)式知，对于$x\in\partial\Omega,\lambda\geqslant 0$，有

$$g(x)+\lambda x=(1+\lambda)x-Tx\neq\theta$$

故定理4条件满足，由定理4知，存在$x^*\in\Omega$，使$g(x^*)=\theta$，即$Tx^*=x^*$，证完。

推论3． 设T：$\overline{\Omega}\to E$是概率紧连续算子，Ω是E中的凸集，$T(\partial\Omega)\subset\Omega$，则$T$在$\overline{\Omega}$内有不动点。

参 考 文 献

1 张石生．概率度量空间的基本理论及应用[1].应用数学和力学，1988；2：117—126

2 林颐奇．概率赋范线性空间上线性算子的一些性质，南京师大学报，1985；4

3 龚怀云等．概率度量空间的有界性、可分性与紧性，工程数学学报，1984；2：57—65

4 K.Deimling. Nonlinear Functional Analysis, Spring-verlag,1985

5 Guo Dajun. Some fixed point theorems and applications. Nonlinear Analysis T M A, 1986; 10 (11): 1293—1302

The Generalized Topological Degree And Fixed Point Theorems of Probabilistic A Proper Mappings

Cao Juesheng

(Wuxi Institute of Light Industry)

Lin Yiqi

(Nanjing Normal University)

Abstract This gives the topological degree and fixed point theorems of probabilistic A-proper mappings on probabilistic normed linear spaces(E, F, Δ) which satisfy sup t<1 Δ(t,t) = 1 and has separatiable bases. As a special exampl, we discussed the topological degree of probabilistic compact continuous fields on above spaces.

Keywords probabilistic approximate scheme, probabilistic A-proper mapping, topological degree, fixed point.