第10卷 无锡轻工业学院学报 Vol. 10
第4期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1991 No. 4

# 在二元正态总体中选取代表点的问题

费荥昌
（基础课部）

**摘要** 本文研究如何在二元正态总体中选取代表点，使它们尽可能多地保留总体的信息。

**关键词** 二元正态总体；代表点；损失函数

## 0 引言

文[1—4]研究了在一元总体中选取代表点的问题，本文研究在二元正态总体中如何选取代表点。

设二元正态总体$(U, V)$的密度函数为

$$f(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(u-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2r(u-\mu_1)(v-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(v-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\},$$

即$(U, V)\sim N(\mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2; r)$。

从总体$(U, V)$选取$n$个代表点

$$(u_{n1}, v_{n1}), (u_{n2}, v_{n2}), \cdots, (u_{nn}, v_{nn}),$$

使它们尽可能多地保留总体的信息，即使损失函数

$$L(u_1, \cdots, u_n; v_1, \cdots, v_n)$$

$$=\frac{1}{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min_{1\leqslant i\leqslant n}[(u-u_i)^2+(v-v_i)^2]f(u,v)dudv$$

在$u_{n1}, \cdots, u_{nn}; v_{n1}, \cdots, v_{nn}$达到最小值。

令

$$X=[(U-\mu_1)/\sigma_1+(V-\mu_2)/\sigma_2]/\sqrt{2(1+r)},$$

$$Y=[-(U-\mu_1)/\sigma_1+(V-\mu_2)/\sigma_2]/\sqrt{2(1-r)},$$

则$(X,Y)\sim N(0,1; 0,1; 0)$，即$(X, Y)$服从二元标准正态分布，因此只需对二元标准正态总体$(X,Y)$考虑代表点的选取问题。这时

本文1990年9月1日收到

$$L(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \min_{1\leqslant i\leqslant n} [(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\varphi(x)=\exp\{-x^2/2\}/\sqrt{2\pi}.$$

为求代表点$(x_{n1}, y_{n1})$，…，$(x_{nn}, y_{nn})$，使$L(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n)$在$x_{n1}, \cdots, x_{nn}; y_{n1}, \cdots, y_{nn}$达到最小值，可解方程组

$$\partial L/\partial x_1=0, \cdots, \partial L/\partial x_n=0, \partial L/\partial y_1=0, \cdots, \partial L/\partial y_n=0,$$

但是这是很复杂的。

根据$N(0,1; 0,1; 0)$的分布特性，我们改为考虑等距地分布在圆周上的代表点的选取问题，即给定了代表点的个数，如何选取圆的半径，使损失函数达到最小值。

## 1　预备公式

记

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad T(y, x)=-\int_{-\infty}^{y}\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{0}^{xt_1}\varphi(t_2)\mathrm{d}t_2,$$

有

$$\int_{-\infty}^{x} t\varphi(t)\,\Phi(t\,\mathrm{tg}(\pi/m))\mathrm{d}t$$

$$=\sin(\pi/m)\,\Phi(x\sec(\pi/m))/\sqrt{2\pi}-\varphi(x)\,\Phi(x\,\mathrm{tg}(\pi/m)),$$

$$T(0, \mathrm{tg}(\pi/m))=1/(2m),\quad T(+\infty, \mathrm{tg}(\pi/m))=0\quad (m\geqslant 3).$$

对$\Phi(x)$，$T(y,x)$作数值计算时采用[5]的第二章§7中的近似公式：

$$\Phi(x)\doteq 1-\frac{1}{2}(1+0.049867347x+0.0211410061x^2+0.0032776263x^3+0.0000380036x^4+0.0000488906x^5+0.000005383x^6)^{-16}\quad (x>0),$$

$$T(y,x)\doteq \mathrm{arc\,tg}x\cdot\exp\{-xy^2/(2\,\mathrm{arc\,tg}x)\}/(2\pi)\quad (0<x\leqslant 1)$$

及递推公式

$$T(y,x)=\Phi(y)/2+\Phi(xy)/2-\Phi(y)\,\Phi(xy)-T(xy,1/x)\quad (x>1).$$

## 2　在圆周上的代表点的选取

设

$$x_i=R\cos(2(i-1)\pi/n),\quad y_i=R\sin(2(i-1)\pi/n)\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

其中$R>0$，$n\geqslant 2$。

当$n=2$时，有

$$L/2=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}[(x-R)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy,$$

$$L=\int_{0}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)dy$$

$$+\int_{0}^{+\infty}(R^2-2Rx)\varphi(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)dy$$

$$=1+R^2/2-\sqrt{2/\pi}\,R,$$

由$dL/dR=0$得$R=\sqrt{2/\pi}\doteq 0.7979$，这时$L=1-1/\pi\doteq 0.6817$。

当$n\geqslant 3$时，有

$$L/2n=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}dx\int_{0}^{x\,\mathrm{tg}(\pi/n)}[(x-R)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy,$$

$$L=n/2\pi\int_{0}^{\pi/n}d\theta\int_{0}^{+\infty}(r^2+R^2-2Rr\cos\theta)e^{-r^2/2}rdr$$

$$=n/2\pi\int_{0}^{\pi/n}(2+R^2-\sqrt{2\pi}\,R\cos\theta)d\theta$$

$$=1+R^2/2-nR\sin(\pi/n)/\sqrt{2\pi}.$$

由$dL/dR=0$得

$$R=n\sin(\pi/n)/\sqrt{2\pi}, \tag{1}$$

这时

$$L=1-n^2\sin^2(\pi/n)/(4\pi). \tag{2}$$

由(1)(2)算得表1

表 1

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ | 0.7979 | 1.0365 | 1.1284 | 1.1725 | 1.1968 | 1.2117 | 1.2213 | 1.2280 | 1.2328 | 1.2363 | 1.2390 |
| $L$ | 0.6817 | 0.4629 | 0.3634 | 0.3127 | 0.2838 | 0.2659 | 0.2542 | 0.2460 | 0.2401 | 0.2357 | 0.2324 |

当$n\to\infty$时，$L\to 0.2146$（$1-\pi/4$的近似值）。

## 3 在原点及圆周上的代表点的选取

设
$$x_0=0,\ y_0=0,$$
$$x_i=R\cos(2(i-1)\pi/m),\ y_i=R\sin(2(i-1)\pi/m)\ (i=1,2,\cdots,m),$$
其中$R>0$，$m\geqslant 2$，代表点的个数为$n=m+1$。

当$m=2$时，有

$$L/2=\tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{R/2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}y\right.$$
$$\left.+\int_{R/2}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}[(x-R)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}y\right\},$$
$$L=1-2R\varphi(R/2)+R^2[1-\Phi(R/2)],$$

于是$\mathrm{d}L/\mathrm{d}R=0$即
$$R-\varphi(R/2)-R\,\Phi(R/2)=0. \tag{3}$$

当$m\geqslant 3$时，有

$$L/2m=\tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{R/2}\mathrm{d}x\int_0^{x\,\mathrm{tg}(\pi/m)}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}y\right.$$
$$\left.+\int_{R/2}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{x\,\mathrm{tg}(\pi/m)}[(x-R)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}y\right\},$$

$$L=m\left\{\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{x\,\mathrm{tg}(\pi/m)}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}y\right.$$
$$\left.+\int_{R/2}^{+\infty}(R^2-2Rx)\varphi(x)\mathrm{d}x\int_0^{x\,\mathrm{tg}(\pi/m)}\varphi(y)\mathrm{d}y\right\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}y$$
$$-mR^2[T(+\infty,\ \mathrm{tg}(\pi/m))-T(R/2,\ \mathrm{tg}(\pi/m))]$$
$$-2mR\int_{R/2}^{+\infty}x\varphi(x)[\Phi(x\,\mathrm{tg}(\pi/m))-1/2]\mathrm{d}x,$$

由预备公式得

$$L=1+mR^2T(R/2,\ \mathrm{tg}(\pi/m))-\sqrt{2/\pi}\,m\sin(\pi/m)\cdot R[1-\Phi(R\sec(\pi/m)/2)]$$
$$-2mR\varphi(R/2)[\Phi(R\,\mathrm{tg}(\pi/m)/2)-1/2],$$

于是$dL/dR=0$即

$$2RT(R/2,\ \mathrm{tg}(\pi/m))-\sqrt{2/\pi}\sin(\pi/m)[1-\Phi(R\sec(\pi/m)/2)]$$
$$-2\varphi(R/2)[\Phi(R\,\mathrm{tg}(\pi/m)/2)-1/2]=0. \tag{4}$$

用牛顿法分别求方程(3)(4)的近似解，得表2。

表 2

| $m$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $R$ | 1.2240 | 1.2780 | 1.3673 | 1.4117 | 1.4382 | 1.4549 | 1.4660 | 1.4737 | 1.4793 | 1.4834 |
| $L$ | 0.5951 | 0.4105 | 0.3058 | 0.2529 | 0.2223 | 0.2032 | 0.1906 | 0.1818 | 0.1755 | 0.1708 |

当$n=10^5$时，$L=0.1477$。

## 4 在多个圆周上的代表点的选取

设

$$x_{(i-1)m+j}=R_i\cos(2(j-1)\pi/m),\quad y_{(i-1)m+j}=R_i\sin(2(j-1)\pi/m)$$
$$(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,m),$$

其中 $0<R_1<R_2<\cdots<R_s$，$s\geqslant2$，$m\geqslant2$，代表点的个数为$n=sm$。

当$m=2$时，对$s\geqslant3$，有

$$L/2=1/2\Big\{\int_0^{(R_1+R_2)/2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}[(x-R_1)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy$$
$$+\sum_{i=2}^{s-1}\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}[(x-R_i)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy$$
$$+\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}[(x-R_s)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy\Big\},$$

$$L=\int_0^{(R_1+R_2)/2}(x-R_1)^2\varphi(x)dx+\sum_{i=2}^{s-1}\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}(x-R_i)^2\varphi(x)dx$$
$$+\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}(x-R_s)^2\varphi(x)dx+1/2=(f+1)/2,$$

对$s=2$，也有$L=(f+1)/2$，这里$f$是一元标准正态总体的损失函数[1]，因此使$f$达到最小值的代表点也使$L$达到最小值，据文[1]有表3。

表　3

| $S$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $n$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| $R_1$ | 0.4528 | 0.3177 | 0.2451 | 0.1997 | 0.1685 |
| $R_2$ | 1.5104 | 1.0001 | 0.7561 | 0.6099 | 0.5119 |
| $R_3$ | | 1.8938 | 1.3440 | 1.0580 | 0.8770 |
| $R_4$ | | | 2.1527 | 1.5918 | 1.2861 |
| $R_5$ | | | | 2.3469 | 1.7840 |
| $R_6$ | | | | | 2.5018 |
| $L$ | 0.5587 | 0.5290 | 0.5173 | 0.5114 | 0.5081 |

当$n=2s\to\infty$时，因$f\to 0$[6]，有$L\to 0.5$。

当$m\geqslant 3$时，对$s\geqslant 3$，有

$$L/2m=1/2\Big\{\int_0^{(R_1+R_2)/2}dx\int_0^{x\,tg(\pi/m)}[(x-R_1)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy$$

$$+\sum_{i=2}^{s-1}\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}dx\int_0^{x\,tg(\pi/m)}[(x-R_i)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy$$

$$+\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}dx\int_0^{x\,tg(\pi/m)}[(x-R_s)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy\Big\},$$

$$L=m\Big\{\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x\,tg(\pi/m)}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)dy$$

$$+\int_0^{(R_1+R_2)/2}(R_1^2-2R_1x)\,\varphi(x)dx\int_0^{x\,tg(\pi/m)}\varphi(y)dy$$

$$+\sum_{i=2}^{s-1}\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}(R_i^2-2R_ix)\varphi(x)dx\int_0^{x\,tg(\pi/m)}\varphi(y)dy$$

$$+\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}(R_s^2-2R_sx)\varphi(x)dx\int_0^{x\,tg(\pi/m)}\varphi(y)dy\Big\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)dy$$

$$-mR_1^2[T((R_1+R_2)/2,\ tg(\pi/m))-T(0,\ tg(\pi/m))]$$

$$-2mR_1\int_0^{(R_1+R_2)/2}x\varphi(x)[\Phi(x\,tg(\pi/m))-1/2]dx$$

$$-m\sum_{i=2}^{s-1}R_i^2[T((R_i+R_{i+1})/2,\ \mathrm{tg}(\pi/m))-T((R_{i-1}+R_i)/2,\ \mathrm{tg}(\pi/m))]$$

$$-2m\sum_{i=1}^{s-1}R_i\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}x\varphi(x)[\Phi(x\mathrm{tg}(\pi/m))-1/2]\mathrm{d}x$$

$$-mR_s^2[T(+\infty,\ \mathrm{tg}(\pi/m))-T((R_{s-1}+R_s)/2,\ \mathrm{tg}(\pi/m))]$$

$$-2mR_s\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}x\varphi(x)[\Phi(x\mathrm{tg}(\pi/m))-1/2]\mathrm{d}x,$$

由预备公式得

$$L=1+R_1^2/2-\sqrt{2/\pi}\,m\sin(\pi/m)\cdot(R_s-R_1/2)$$

$$+m\sum_{i=1}^{s-1}(R_{i+1}^2-R_i^2)T((R_i+R_{i+1})/2,\ \mathrm{tg}(\pi/m))$$

$$+\sqrt{2/\pi}\,m\sin(\pi/m)\sum_{i=1}^{s-1}(R_{i+1}-R_i)\Phi((R_i+R_{i+1})\sec(\pi/m)/2)$$

$$-2m\sum_{i=1}^{s-1}(R_{i+1}-R_i)\varphi((R_i+R_{i+1})/2)[\Phi((R_i+R_{i+1})\mathrm{tg}(\pi/m)/2)-1/2].\quad(5)$$

对$s=2$，(5)也成立。

用单纯形法[7]求$R_1$，$R_2$，…，$R_s$，使$L$达到最小值，得表4。

表 4

| $s$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 3 | 4 | 3 |
| $n$ | 6 | 8 | 10 | 12 | 9 | 12 | 12 |
| $R_1$ | 0.6892 | 0.8004 | 0.7946 | 0.8056 | 0.5250 | 0.6342 | 0.4344 |
| $R_2$ | 1.6702 | 1.9268 | 1.8564 | 1.8658 | 1.1699 | 1.3865 | 0.9877 |
| $R_3$ | | | | | 2.0117 | 2.5809 | 1.5201 |
| $R_4$ | | | | | | | 2.2885 |
| $L$ | 0.3528 | 0.2321 | 0.1829 | 0.1521 | 0.3240 | 0.1897 | 0.3124 |

## 5 在原点及多个圆周上的代表点的选取

设

$$x_0=0,\quad y_0=0,$$

$$x_{(i-1)m+j}=R_i\cos(2(j-1)\pi/m),\quad y_{(i-1)m+j}=R_i\sin(2(j-1)\pi/m)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

其中$0<R_1<R_2<\cdots<R_s$，$S\geqslant2$，$m\geqslant2$，代表点的个数为$n=sm+1$。

当$m=2$时，有

$$L/2=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{R_1/2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)dy\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{s-1}\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x-R_i)^2+y^2\right]\varphi(x)\varphi(y)dy$$

$$\left.+\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x-R_s)^2+y^2\right]\varphi(x)\varphi(y)dy\right\},$$

其中$R_0=0$。

$$L=\int_0^{R_1/2}x^2\varphi(x)dy+\sum_{i=1}^{s-1}\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}(x-R_i)^2\varphi(x)dx$$

$$+\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}(x-R_s)^2\varphi(x)dx+\frac{1}{2}=(f+1)/2,$$

据文[1]有表5。

表　5

| $s$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $m$ | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $n$ | 5 | 7 | 9 | 11 |
| $R_1$ | 0.7646 | 0.5606 | 0.4437 | 0.3675 |
| $R_2$ | 1.7242 | 1.1882 | 0.9189 | 0.7525 |
| $R_3$ | | 2.0338 | 1.4767 | 1.1791 |
| $R_4$ | | | 2.2559 | 1.6933 |
| $R_5$ | | | | 2.4282 |
| $L$ | 0.5400 | 0.5220 | 0.5139 | 0.5096 |

当$n=2s+1\to\infty$时，因$f\to 0$[6]，有$L\to 0.5$。

当$m\geqslant 3$时，有

$$L/2m=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{R_1/2}dx\int_0^{x\mathrm{tg}(\pi/m)}(x^2+y^2)\varphi(x)\varphi(y)dy\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{s-1}\int_{(R_{i-1}+R_i)/2}^{(R_i+R_{i+1})/2}dx\int_0^{x\mathrm{tg}(\pi/m)}[(x-R_i)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy$$

$$\left.+\int_{(R_{s-1}+R_s)/2}^{+\infty}dx\int_0^{x\mathrm{tg}(\pi/m)}[(x-R_s)^2+y^2]\varphi(x)\varphi(y)dy\right\},$$

其中$R_0=0$。

类似于4，可得

$$L=1+mR_1^2T(R_1/2,\ tg(\pi/m))-\sqrt{2/\pi}m\sin(\pi/m)[R_s-R_1\Phi(R_1\sec(\pi/m)/2)]$$
$$-2mR_1\varphi(R_1/2)[\Phi(R_1tg(\pi/m)/2)-1/2]$$
$$+m\sum_{i=1}^{s-1}(R_{i+1}^2-R_i^2)T((R_i+R_{i+1})/2,\ tg(\pi/m))$$
$$+\sqrt{2/\pi}\ m\sin(\pi/m)\sum_{i=1}^{s-1}(R_{i+1}-R_i)\Phi((R_i+R_{i+1})\sec(\pi/m)/2)$$
$$-2m\sum_{i=1}^{s-1}(R_{i+1}-R_i)\varphi((R_i+R_{i+1})/2)[\Phi((R_i+R_{i+1})tg(\pi/m)/2)-\tfrac{1}{2}].$$

用单纯形法[7]求$R_1$，$R_2$，…，$R_s$，使$L$达到最小值，得表6。

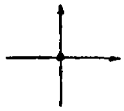
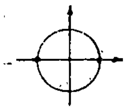
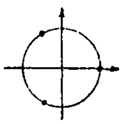
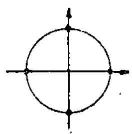
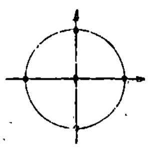
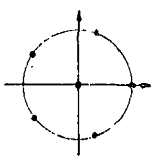
表 6

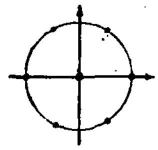
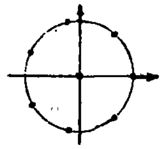
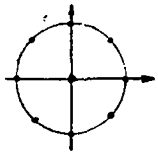
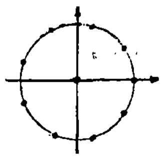
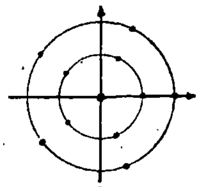
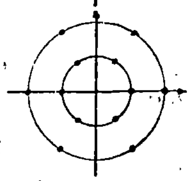
| $S$ | 2 | 2 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $m$ | 3 | 4 | 5 | 3 |
| $n$ | 7 | 9 | 11 | 10 |
| $R_1$ | 0.8650 | 1.0026 | 0.9861 | 0.6690 |
| $R_2$ | 1.7942 | 2.1473 | 2.0053 | 1.2832 |
| $R_3$ | | | | 2.1080 |
| $L$ | 0.3415 | 0.2161 | 0.1691 | 0.3198 |

## 6 较好的代表点

给定了代表点的个数，通过比较各种方案的损失函数值，可以选出较好的代表点（损失较小）。表7对$n\leqslant12$列出了较好的代表点。

表 7

| $n$ | 代表点 | | $L$ |
|---|---|---|---|
| 1 |  | (0, 0) | 1 |
| 2 |  | (±0.7979, 0) | 0.6817 |
| 3 |  | (1.0365, 0) (−0.5183, ±0.8976) | 0.4629 |
| 4 |  | (±1.1284, 0) (0, ±1.1284) | 0.3634 |
| 5 |  | (0, 0)<br>(±1.3673, 0) (0, ±1.3673) | 0.3058 |
| 6 |  | (0, 0) (1.4117, 0)<br>(0.4362, ±1.3426) (−1.1421, ±0.8298) | 0.2529 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 |  | (0, 0) (±1.4382, 0)<br>(0.7191, ±1.2455) (−0.7191, ±1.2455) | 0.2223 |
| 8 |  | (0, 0) (1.4549, 0)<br>(0.9071, ±1.1375) (−0.3237, ±1.4184)<br>(−1.3108, ±0.6313) | 0.2032 |
| 9 |  | (0, 0) (±1.4660, 0)<br>(1.0366, ±1.0366) (0, ±1.4660)<br>(−1.0366, ±1.0366) | 0.1906 |
| 10 |  | (0, 0)(1.4737, 0)<br>(1.1289, ±0.9473)(0.2559, ±1.4513)<br>(−0.7369, ±1.2763)(−1.3848, ±0.5040) | 0.1818 |
| 11 |  | (0, 0)(0.9861, 0)(0.3047, ±0.9378)<br>(−0.7978, ±0.5796)(2.0053, 0)<br>(0.6197, ±1.9072)(−1.6223, ±1.1787) | 0.1691 |
| 12 |  | (±0.8056, 0) (0.4028, ±0.6977)<br>(−0.4028, ±0.6977) (±1.8658, 0)<br>(0.9329, ±1.6158) (−0.9329, ±1.6158) | 0.1521 |

## 参 考 文 献


1 方开泰，贺曙东.在正态总体中如何选择给定数目的代表点的问题.应用数学学报，1984；3

2 张立民.如何在母体中选取给定数目的代表点问题.数理统计与应用概率，1987；2

3 费荣昌.在Pearson分布族总体中选取代表点的问题.无锡轻工业学院学报，1990；1

4 费荣昌.在离散型总体中选取代表点的问题.数理统计与应用概率(待发表)

5 张尧庭.方开泰.多元统计分析引论.科学出版社，1983

6 费荣昌.代表点与总体之间的统计关系.无锡轻工业学院学报，1991；1

7 南京大学.最优化方法.科学出版社，1973

# The Problem of Selecting Representative Points from A Bivariate Normal Population

Fei Rongchang

(Dept. of Found. Courses)

**Abstract** This paper studies how to choose representative points form a bivariate normal population with as much information of the population as possible arises.

**Keywords** Bivariate normal population; Representative points; Lose function