

按 ψ 、 K 设计具有最佳传动角的曲柄摇杆机构

吕庸厚 伦 铭

(机械工程系)

摘要 本文在曲柄摇杆机构一般作图法求解的基础上,用解析法对该机构按摇杆摆角 ψ 和极位夹角 θ (即行程速度变化系数 K)进行最佳传动角设计作了较深入和全面的研究,给出了有关设计公式和线图。研究表明,Alt线图有较大的错误,Lichtenheldt线图基本正确,但精度较差,且在某些情况下难以直接求解。本文所提供的设计方法和线图不仅无上述弊端还更简捷和易于接受,因而具有实用价值和易于推广。

关键词 曲柄摇杆机构;传动角;行程速度变化系数;极位夹角

0 引 言

设计曲柄摇杆机构时, 已知摇杆的摆角 ψ 和行程速度变化系数 K , 为了获得最佳传动角 μ , 阿尔托包列夫斯基院士等人在 1956 年发表的著作^[1]中, 引用了阿尔特(德国)适用图 1 所示图解法的设计线图(图 2)。图中横坐标为曲柄对应于摇杆工作行程的转角 φ_2 , 纵坐标为摇杆摆角 ψ_{12} , 图中的实线为最小传动角为最大值 $(\mu_{\min})_{\max}$ 的等值线, 虚线为相应 φ 角的等值线(φ 角为图 1 中的 $\angle C_1AD$)。Lichtenheldt 用同样的图解法给出了如图 3 所示设计线图^[2], 图中 ψ_0 、 φ_0 、 β 和 $\max \mu_{\min}$ 分别与图 2 中的 ψ_{12} 、 φ_2 、 φ_1 、 $(\mu_{\min})_{\max}$ 相同; 实线为 $\max \mu_{\min}$ 的等值线; 虚线为 β 的等值线, 即图 2 的 φ_1 和 $(\mu_{\min})_{\max}$ 的等值线。由此知, 仅需将图 3 按逆时针转 90° ,

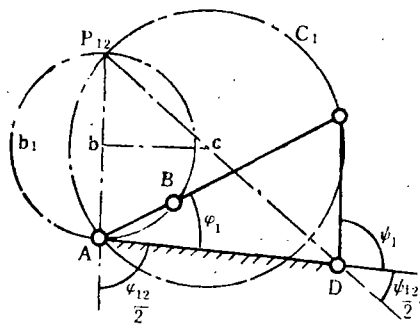


图 1 按机构极端位置求解曲柄摇杆机构

收稿日期: 1991-04-09

便应与图2完全相同,但事实上不是如此。如任举一条 $(\mu_{\min})_{\max} = 20^\circ$ 的等值线来看,图2中 $\varphi_2 = 180^\circ$ 时 $\psi_{12} = 128^\circ$, 而图3中为 140° , 这两条曲线的形状也明显不同。

近几年来,用解析法完成具有最佳传动角的曲柄摇杆机构的设计逐渐引起了人们的广泛重视^[3,4]。然而他们的研究工作都未涉及到上述设计线图。

考虑到图2和图3所依据的图解法是建立在运动几何学理论基础之上的,因此它不易为一般工程设计人员接受,且难以推广。而一般作图法(如图4所示,其中 θ 为极位夹角)以其简单明了,被高校教材和研究人员所采用,因而以它为研究基础就更具有实用意义。

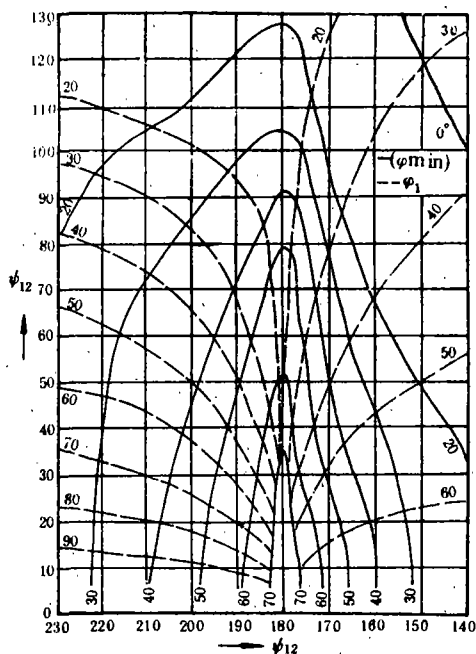


图2 Alt 线图

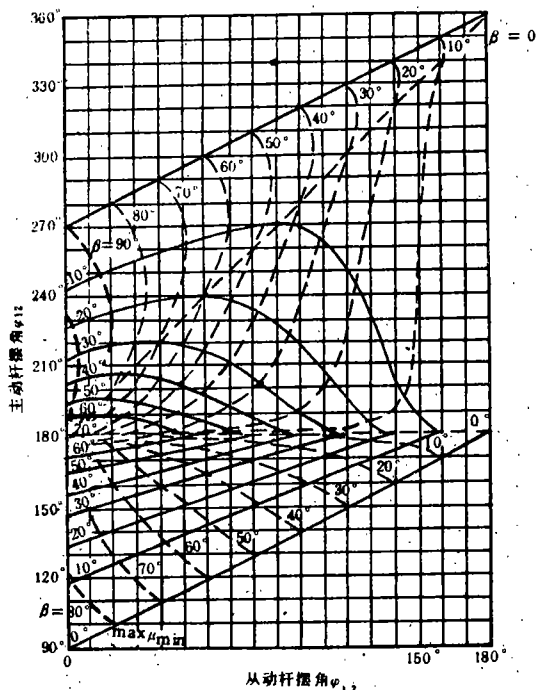


图3 Lichtenheldt 线图

本文在一般作图法的基础上,用解析法对上面提出的问题进行较深入和全面的研究,并提供正确和便于设计的线图。

1 最佳传动角的机构设计

1.1 机构类型与曲柄轴心 A 的选取范围

按 K 和曲柄与工作行程时摇杆转向之间的关系,曲柄摇杆机构有三种不同的型式,当摇杆 CD 的工作行程 C_1C_2 为慢行程,即 $K > 1$ 时,若两者转向相同,应采用如图4所示的 I 型的曲柄摇杆机构(简称 I 型机构,下同),此时 A, D 位于 C_1C_2 连线的同侧;若两者转向相反,应采用如图5所示的 II 型机构,此时 A, D 位于 C_1C_2 连线的异侧。如工作行程为快行程,则反之。若 $K = 1$,应采用如图6所示的 III 型机构,此时 A 位于 C_1C_2 的延长线上。

在图4、5和6中,过 D 点作 $\angle C_1DC_2$ 的角平分线,将平面分为左右两对称部分,故以下仅研究左半部分即可。为了保证实现给定的摆角 ψ , A 点须在 DC_1 连线的左上方,同时又

须在 DC_2 连线的左下方之区域内, 即在圆弧 C_2E 段内选取。在图 4 和图 5 中, 以 δ 代表 $\angle AC_1C_2$, A 点的选取范围即可由它来表示:

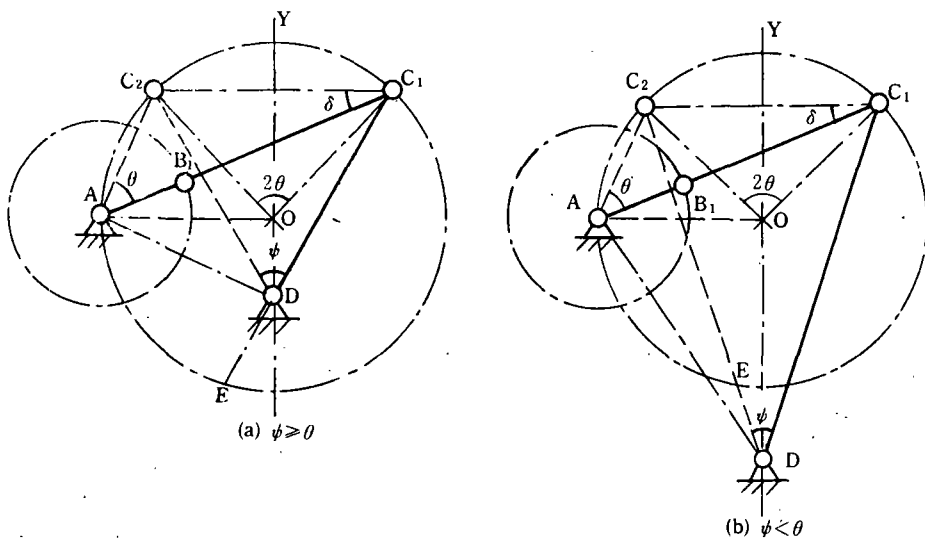


图 4 I 型机构

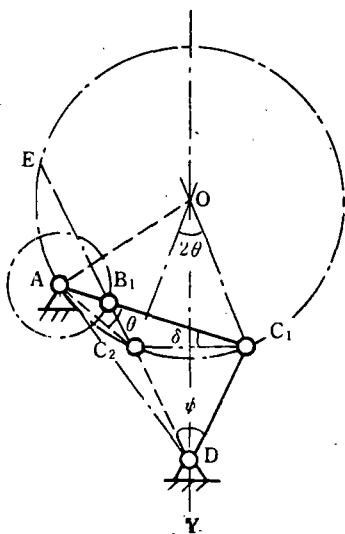


图 5 II 型机构

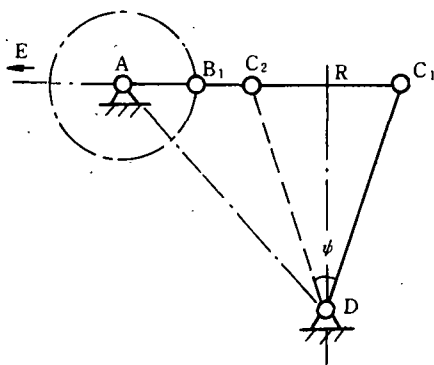


图 6 III 型机构

对于 I 型机构:

当 $\psi \geq \theta$ 时

$$0^\circ < \delta < 90^\circ - \psi/2$$

当 $\psi < \theta$ 时

$$0^\circ < \delta < 90^\circ + \psi/2 - \theta$$

(1)

对于 II 型机构:

$$0^\circ < \delta < 90^\circ - \psi/2 - \theta \quad (2)$$

1.2 最小传动角与 δ 的关系

1.2.1 I 型机构(如图4所示)设曲柄摇杆机构中, $L_{AB}=a$, $L_{BC}=b$, $L_{DC}=c$, $L_{AD}=d$, 则

$$L_{AC_1}=b+a, L_{AC_2}=b-a, L_{C_1C_2}=2c\sin(\psi/2)$$

在 $\triangle AC_1C_2$ 中, 由正弦定理可解得

$$\begin{aligned} a &= \frac{c\sin(\psi/2)\cos(\delta + \theta/2)}{\cos(\theta/2)} \\ b &= \frac{c\sin(\psi/2)\sin(\delta + \theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned} \quad (3)$$

在 $\triangle ADC_1$ 中, $\angle AC_1D = 90^\circ - \psi/2 - \delta$, 由余弦定理可解得

$$d = \frac{c}{\sin\theta} - \sqrt{\sin^2\theta + 4\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\psi-\theta}{2}\right)\right]\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)\right]} \quad (4)$$

曲柄回转一周得到连杆与摇杆夹角的最小值 $\gamma_{\min}$ 和最大值 $\gamma_{\max}$ 为

$$\cos\gamma_{\max} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} \pm \frac{ad}{bc} \quad (5)$$

式中

“+”号对应 $\cos\gamma_{\min}$; “-”对应 $\cos\gamma_{\max}$.

将式(3)和(4)代入, 得

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} = \frac{\cos\left(\frac{\psi-\theta}{2}\right)\left[\cos^2(\theta/2) - \cos^2(\delta + \theta/2)\right]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\delta + \theta/2)} \quad (6)$$

$$\frac{ad}{bc} = \sqrt{\frac{\cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2(\theta/2)} - \frac{\cos^2\left(\frac{\psi-\theta}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)\right]\cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^4(\theta/2)\sin^2(\delta + \theta/2)}} \quad (7)$$

如令

$$N = \frac{\cos\left(\frac{\psi-\theta}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2(\delta + \theta/2)\right]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\delta + \theta/2)} \quad (8)$$

$$n = 1 - \frac{\cos^2(\delta + \theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} \quad (9)$$

则

$$\frac{ad}{bc} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - N^2)} \quad (10)$$

$$\cos \gamma_{\min}^{\max} = N \pm \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - N^2)} \quad (11)$$

由于 $\frac{ad}{bc}$ 必为正值, 如 $\frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2bc}$ 为正值, 由式(5)知 则 $\mu_{\min} = \gamma_{\min}$; 反之, $\mu_{\min} = 180^\circ - \gamma_{\max}$ 。

对于 I 型机构, $0^\circ < \theta < 180^\circ$, $0^\circ < \psi < 180^\circ$, 所以 $\cos\left(\frac{\psi-\theta}{2}\right)$ 必为正值。同时由图 4 知, $\angle AOY = 2\delta + \theta$, 它为小于 180° 的正值, 还由于 δ 大于零, 故 $[\cos^2(\theta/2) - \cos^2(\delta + \theta/2)]$ 亦为正值。由式(6)知, $\frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2bc}$ 为正值, 所以

$$\cos \mu_{\min} = N + \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - N^2)} \quad (12)$$

1.2.2 II 型机构(如图 5 所示) 由于图 5 和图 4 中 $\triangle AC_1C_2$ 的各边及所对应角度的关系相同, 所以 II 型机构的 a, b 计算公式仍为式(3)。

由图 5 知, $\angle AC_1D = 90^\circ - \psi/2 + \delta$, 按余弦定理可解得

$$d = \frac{c}{\sin \theta} \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\psi + \theta}{2}\right) \right] \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right) \right]} \quad (13)$$

它与式(4)比较, 仅将 I 型机构计算 d 公式中的 $(\psi - \theta)$ 改为 $(\psi + \theta)$ 。

同样可得

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} = - \frac{\cos^2\left(\frac{\psi + \theta}{2}\right) [\cos^2(\theta/2) - \cos^2(\delta + \theta/2)]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\delta + \theta/2)} \quad (14)$$

它的绝对值与 I 型机构的式(6)相比, 亦仅将式(6)中的 $(\psi - \theta)$ 改为 $(\psi + \theta)$ 。因此可将 N 统一写成

如令

$$N = \frac{\cos\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right) [\cos^2(\theta/2) - \cos^2(\delta + \theta/2)]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\delta + \theta/2)} \quad (15)$$

$\cos^2\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right)$ 中的“ $-$ ”号用于 I 型机构, “ $+$ ”号用于 II 型机构。

同时

$$\frac{ad}{bc} = \sqrt{\frac{\cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2(\theta/2)} - \frac{\cos^2\left(\frac{\psi + \theta}{2}\right) [\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)] \cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^4(\theta/2) \sin^2(\delta + \theta/2)}}$$

再将式(15)的关系代入, 仍得

$$\frac{ad}{bc} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - N^2)}$$

于是对 II 型机构

$$\cos \gamma_{\max}^{\min} = -N \pm \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - N^2)} \quad (16)$$

由式(2)可得

$$\frac{\psi + \theta}{2} < 90^\circ - (\delta + \theta/2)$$

在图 5 中, $\angle AOY = 2\delta + \theta$, 它为小于 180° 的正值, 即 $0^\circ < \delta + \theta/2 < 90^\circ$, 故 $(\psi + \theta)/2$ 也为小于 90° 的正值, 这样 $\cos^2\left(\frac{\psi + \theta}{2}\right)$ 和 $\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)\right]$ 都是正值, 从式(14)可知, II 型机构的 $\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc}$ 为负值, 即

$$\cos \mu_{\min} = \cos(180^\circ - \gamma_{\max}) = -\cos \gamma_{\max}$$

将式(16)的关系代入

$$\cos \mu_{\min} = N + \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - N^2)}$$

它与式(12)相同, 成为 I 型和 II 型机构计算 $\cos \mu_{\min}$ 的统一公式, 其中 N 应按式(15)来计算。如将 II 型机构的 ψ 看作负值, 由于 $\cos\left(\frac{-\psi + \theta}{2}\right)$ 等于 $\cos\left(\frac{\psi - \theta}{2}\right)$, 则计算 N 和 $\cos \mu_{\min}$ 的公式便与 I 型机构完全相同。

1.2.3 III 型机构(如图 6 所示) 该机构的 $K=1$, $\theta=0^\circ$, $\delta=0^\circ$ 。

由图 6 知

$$a = \frac{L_{c_1 c_2}}{2} = c \sin(\psi/2)$$

$$b = L_{AR}$$

如令 $b = \lambda a$, λ 为大于 1 的系数, 则

$$b = \lambda c \sin(\psi/2)$$

$\therefore$

$$d = c \sqrt{\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} = 0$$

由图 6 知, 对 III 型机构, $\mu_{\min} = \gamma_{\min} = 180^\circ - \gamma_{\max}$

$\therefore$

$$\cos \mu_{\min} = \frac{ad}{bc} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{\lambda^2} \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (17)$$

1.3 按最佳传动角选择 A 点

1.3.1 I型机构和II型机构 为了在可行段内,确定一个可使机构最小传动角为最大的A点,亦即最佳的 δ ,下面将I型和II型机构的统一表达式(12)对 δ 求导,并经整理后得

$$\frac{d(\cos \mu_{\min})}{d\delta} = \left[1 - \frac{\frac{1}{n} - 1}{\sqrt{\frac{n}{N^2} - 1}} \right] \left[\frac{dN}{d\delta} - \frac{N}{2n} \frac{dn}{d\delta} \left(\sqrt{\frac{\frac{n}{N^2} - 1}{\frac{1}{n}}} + 1 \right) \right]$$

分别将式(15)和(9)对 δ 求导,得

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\delta} &= \frac{\cos\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right) \cos\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)} \right] \\ \frac{dn}{d\delta} &= \frac{2\cos\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

再将 $\frac{dN}{d\delta}, \frac{dn}{d\delta}$ 代入上式并令其为零,得

$$\frac{\cos\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right) \cos\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[1 - \frac{\frac{1}{n} - 1}{\sqrt{\frac{n}{N^2} - 1}} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)} - \sqrt{\frac{\frac{n}{N^2} - 1}{\frac{1}{n}}} \right] \right] = 0$$

由前知, $\cos\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right)$ 和 $\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right)$ 均不能为零,而式(18)中第一因式等于零的结果为 $\delta=0$ 以及 $\delta=90^\circ - \psi/2$ (对于 $\psi \geq \theta$ 的I型机构); $\delta=90^\circ + \psi/2 - \theta$ (对于 $\psi < \theta$ 的I型机构); $\delta=90^\circ - \psi/2 - \theta$ (对于II型机构)。它们分别是A在 C_2 和E点的情况,此时 $\mu_{\min}=0$ 。因此 $(\mu_{\min})_{\max}$ 的条件必在式(18)第二因式等于零的方程式中。将式(15)和(9)代入该方程式,经化简整理得

$$\begin{aligned} \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right)} - 1 \right] \sin^6\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^4\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right) \\ - \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

同样,如将II型机构的 ψ 看作负值,则II型与I型机构的计算式(19)可完全相同。

给定 ψ 和 θ (或 K),由式(19)即可解得 $(\mu_{\min})_{\max}$ 对应的 δ 值以 δ^* 表示。

1.3.2 III型机构 由式(17)知, $\lambda=1$ 时, $\mu_{\min}=0$, λ 愈大, $(\mu_{\min})_{\max}$ 愈大。若 $\lambda=\infty$,

$$(\mu_{\min})_{\max} = 90^\circ - \frac{\psi}{2} \quad (20)$$

给定 ψ 的和许用传动角 $[\mu]$,则由式(17)解得 λ ,从而确定A点位置。
此时

$$\lambda = \frac{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2[\mu] - \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}} \quad (21)$$

2 设计线图

为了便于设计, 绘制类似图 2 和图 3 的设计线图。

2.1 δ^* 等值线图

由前知 $\cos\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right)$ 为正值, 所以由式(19)可得

$$\cos^2\left(\frac{\psi \mp \theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^3\left(\delta^* + \frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^6\left(\delta^* + \frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^4\left(\delta^* + \frac{\theta}{2}\right) \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\delta^* + \frac{\theta}{2}\right)}} \quad (22)$$

给定 δ^* 为某值 e 后, 甚易藉上式由 θ 解得相应的 ψ 。在图 7 中, 横坐标为 θ , 纵坐标为 ψ , 将计算结果所得一系列坐标为 (θ, ψ) 的点连接起来, 即得 $\delta^* = e$ 的等值线。

设令式(22)等号右端的值为 Z , 即 $\psi \mp \theta = \pm 2\arccos Z$, 对于 I 型机构, ψ 有两值

$$\psi_{1,2} = \theta \pm 2\arccos Z \quad (23)$$

绘制 I 型机构的 δ^* 等值线时(如图 7 中虚线所示), 若 $2\arccos Z > \theta$, ψ_2 为负值, 它虽对 I 型机构无实际意义, 但由前分析知, 它恰为 II 型机构 ψ 的负值。因此, 仅需将第四象限中纵坐标的负值 ψ 改用绝对值, 则这象限内按 I 型机构绘制的 δ^* 等值线便成为 II 型机构的 δ^* 等值线。图 8 即按此绘成。

2.1.1 $\delta^* = 0$ 的特殊情况 对 I 型机构, 式(19)成

$$\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\psi - \theta}{2}\right)} - 1 \right] = 0 \quad (24)$$

得 $\theta = 0$; $\psi = 180^\circ$ 和 $\psi = 2\theta - 180^\circ$ 。在图 7 中, 这三条直线组成三角形 PQR 。

2.1.2 在图 7 中, θ 为定值的直线 GH 分别与 $\psi = \theta$ 的直线 OQ 和 δ^* 等值线交于 F 、 G 和 H 。由式(23)知 $FG = 2\arccos Z = FH$ 。

图中这两线段相等是 δ^* 等值线的重要性质。

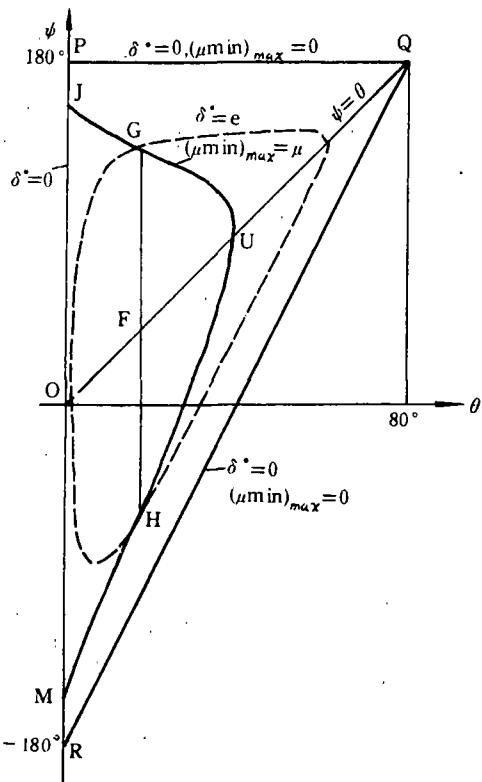


图 7 $(\mu_{\min})_{\max}$ 和 δ^* 等值线图的性质示意图

2.1.3 从式(19)分别求得偏导数 $\frac{\partial \delta^*}{\partial \psi}$ 和 $\frac{\partial \delta^*}{\partial \theta}$, 由 $\frac{\partial \delta^*}{\partial \psi} = 0, \frac{\partial \delta^*}{\partial \theta} = 0$ 和式(19)可联立解得 $\delta_{\max}^*$ 及其相应的 θ 和 ψ 。

由 $\frac{\partial \delta^*}{\partial \psi}$, 得 $\psi = \theta$, 将它代入式(19)得

$$\sin^2\left(\delta^* + \frac{\theta}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} \quad (25)$$

将 $\psi = \theta$ 和式(25)代入 $\frac{\partial \delta^*}{\partial \theta} = 0$ 中, 得 $\sin \frac{\theta}{2} = 1/3$

于是, $\theta = 38.94244^\circ$; $\psi = 38.94244^\circ$, 它是图7中 $\psi = \theta$ 直线上的V点, 再将V点的 θ 和 ψ 代入式(25)得, $\delta_{\max}^* = 15.79317^\circ$

2.2 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线

对I型机构给定 θ 和 δ^* , 由式(19)求得 ψ 后, 再将它们代入式(12)求得 $(\mu_{\min})_{\max}$ 。在图7中将 $(\mu_{\min})_{\max}$ 相等的 (θ, ψ) 点用实线连接起来, 即得 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线(如实线JGUHM)。为了使 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等于给定的值 μ , 先取一个 θ , 采用一维优化得到相应的 δ^* 。其目标函数为

$$F(\delta^*) = \left| \arccos \left[N + \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 1 \right) (n - N^2)} \right] - \mu \right|$$

式中 N 和 n 用式(8)和(9)代入, ψ 用式(23)代入。

约束条件为

$$0^\circ \leq \delta \leq 15.79317^\circ$$

按前分析, 图7中 ψ 为负值点的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 值恰为将 ψ 改用正值的点的II型机构 $(\mu_{\min})_{\max}$ 值。因此, 与绘制 δ^* 等值线相同, 仅需将图7第四象限中负值的 ψ 改用其绝对值, 这象限内I型机构 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线便成为II型机构 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线。同样按此在图8中绘出 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线。

2.2.1 $\delta^* = 0$ 的特殊情况 在图7中, 当 $\psi = 180^\circ$ 和 $\psi = 2\theta - 180^\circ$ 时, $\cos\left(\frac{\psi - \theta}{2}\right)$ 都等于 $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, 代入式(6)和式(7)中, 得 $\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} = 0, \frac{ad}{bc} = 1$, 由式(5)知, $(\mu_{\min})_{\max} = 0$ 。

2.2.2 在图7中由于G、H两点的 θ, δ^* 和 $\cos\left(\frac{\psi - \theta}{2}\right)$ 值相等, 因此由式(12)求得的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 也相等, 故与 δ^* 等值线相同, $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线上, θ 值相同的两点G、H也有 $FG = FH$ 的性质。

2.2.3 $\theta = 0$ 属III型机构 图7中J点的坐标为 $(0, \psi)$, 其 $(\mu_{\min})_{\max} = \mu$ 与III型机构 $\lambda = \infty$ 时的式(20)计算所得一致。

2.3 图2和图3两种设计线图的论证

2.3.1 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线 图2和图3的 ψ_{12} 和 ψ_0 即本文图8的 ψ, φ_{12} 和 φ_0 都是曲柄对应于摇杆工作行程的转角, 图8的横坐标为永为正值的极位夹角 $\theta, \theta = |\varphi_0 - 180^\circ|$ 。

如将图 8 横坐标下方 II 型机构部分与 I 型部分割开，绕原点顺时针方向转 180° ，便应

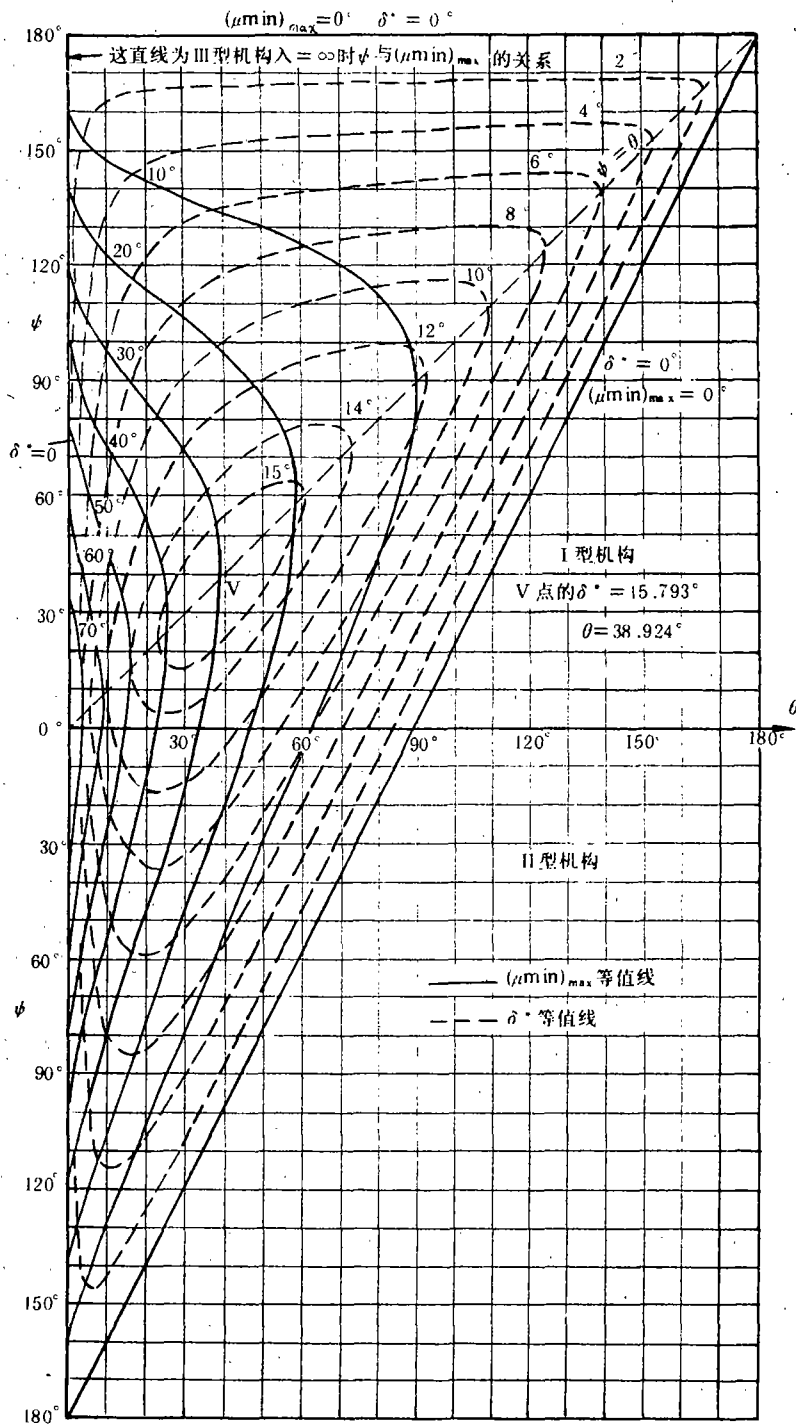


图 8 确定曲柄摇杆机构具有最佳传动角的设计线图

得到与图 2 和图 3 (图 3 需逆时针转 90°) 完全相同，仅两部分相对位置相反的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值

线。显然图3和图8的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线是吻合的,而图2则不然。图3的上半部分相当于和图8的I型机构部分。图3的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线符合前述 $FG=FH$ 的性质; $\theta=0$ (即 $\varphi_0=180^\circ$)直线上各点的 ψ_0 和它的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 值也符合式(20)的关系,由于图8的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线与 $\psi=0$ 直线的交点只有一个,故在图3中相应的两个点与 $\psi_0=0, \varphi_0=180^\circ$ 点距离相等,因此图3的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线基本正确。而图2的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线无上述 $FG=FH$ 、式(20)表达的性质和距离相等的关系,所以图2的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 是不正确的。

仔细检查图3的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 等值线,发现其精度较差。如在I型机构 $\psi=\theta$ 时,式(12)成

$$\cos(\mu_{\min})_{\max} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\delta^* + \frac{\theta}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\delta^* + \frac{\theta}{2}\right)}$$

再将 $\psi=\theta$ 时的关系式(25)代入,则得 $\cos(\mu_{\min})_{\max} = \frac{2\sqrt{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$,将图8中V点的 $\psi=\theta=$

38.94244° ,也即 $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=1/3$ 代入得 $(\mu_{\min})_{\max}=30^\circ$,但在图3中查得 $(\mu_{\min})_{\max}$ 为 30° 的等值线与 $\psi=\theta$ 直线(虚线所示)交点的值为 $\psi=\theta=40^\circ$ 它与精确计算的 38.94244° 相差 1° 多。

2.3.2 β 等值线(严格地讲应为使机构具有最佳传动角的 β 等值线)图3中的 β 和图2中的 φ_0 都为图1及本文图4、5中的 $\angle C_1AD$ 。为了便于计算和图解,本文用 δ (图4、5中的 $\angle AC_1C_2$)作设计参数。在图4、5中的 $\triangle ADC_1$ 和 $\triangle ADC_2$ 中,分别用正弦定理求 d/c 的比值,可得出 β 与 δ 的关系^[8]:

I 型机构

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\delta + \psi/2) \sin \theta}{\cos(\delta + \theta - \psi/2) - \cos(\delta + \psi/2) \cos \theta} \quad (26)$$

II 型机构

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\delta - \psi/2) \sin \theta}{\cos(\delta - \psi/2) \cos \theta - \cos(\delta + \theta + \psi/2)} \quad (27)$$

下面对图2和图3所示的 β 等值线进行验算

a. I型机构 $\psi=\theta$ (即图3虚线表示的直线)时,由式(26)得

$$\beta = 90^\circ - \frac{\psi}{2} \quad (28)$$

图3中 $\psi=\theta$ 直线上各点的 β 和 ψ 的关系完全符合式(28),如 $\psi=\theta=40^\circ$,由式(28)算得的 β 为 70° ,在图3中查得也为 70° ,而图2中查得的 β 却为 65° ,显然不对。

b. 图8中直线QR为 $(\mu_{\min})_{\max}=0$ 的等值线,同时也是 $\delta^*=0$ 的等值线。在图3和图2中, $(\mu_{\min})_{\max}=0$ 的等值线被折为两条平行的斜线。将 $\delta^*=0$ 代入式(26)和式(27)都得 $\beta=90^\circ-\psi/2$ (与式(28)相同)。图3这两条平行线上各点的 β 和 ψ 值完全符合式(28),如 ψ 为 120° , φ_0 分别为 150° 和 330° 的点的 β 都为 30° ,与式(28)计算结果一致;而在图2中, $\psi=120^\circ$, $\varphi_0=150^\circ$ 的点的 β 却为 31° 。曲柄摇杆机构能实现给定的 ψ 和 θ 必须在图2和图3两条 $(\mu_{\min})_{\max}=0$ 的等值线以内,故在其外,应无 β 等值线存在,可是图2右边 $\beta=30^\circ$ 的等值线

已超出这边界(图2中通过 ψ 为 120° , φ_0 为 150° 点的斜线图中系作者补画上),这是图2的一个原则性错误。

c. 对一般给定的 ψ 和 θ ,可由式(19)算出 δ^* ,再将它们代入相应的式(26)或(27)求得 β 。经过验算发现图3的 β 等值线精度较差,如对I型机构 $\psi=20^\circ$, $\theta=50^\circ$, $\delta^*=13.337^\circ$,算得 $\beta=88.980^\circ$,从图3查得 $\beta=90^\circ$,有 1.020° 的误差;而从图2查得的 β 却为 83.5° ,相差竟达 5.480° 。

3 结 论

本文在曲柄摇杆机构一般作图法求解的基础上,用解析法对该机构按 ψ 和 θ (即 K)进行最佳传动角设计作了较深入和全面的研究,给出了有关设计公式和线图。研究结果表明:

a. 已知 ψ 、 K 和曲柄与摇杆工作行程的转向关系,按本文便可选择机构型式,用 $\theta=\left|\frac{K-1}{K+1}\times 180^\circ\right|$ 算得永为正值的极位夹角 θ ,再由图8的设计线图确定 δ^* ,继而由式(3)和(4)或用一般作图法(如图4所示)就能设计出具有最佳传动角的曲柄摇杆机构。而在用图2和图3设计时,按上述已知条件(K 和转向关系)确定 φ_2 和 φ_0 便较繁。

b. 由设计线图8可清楚地看出

ψ 和 θ 一定时, I型较II型机构有较大的 $(\mu_{\min})_{\max}$ 值,如主动件转向不限时,应选用I型机构。

ψ 一定时, θ 愈小, $(\mu_{\min})_{\max}$ 愈大。 $\theta=0$ 的III型机构当 $\lambda=\infty$ 时, $(\mu_{\min})_{\max}$ 最大。

θ 一定时,对I型机构, ψ 愈接近 θ , $(\mu_{\min})_{\max}$ 愈大;对II型机构, ψ 愈小, $(\mu_{\min})_{\max}$ 愈大。

给定许用传动角 $[\mu]$, θ 将受限制。如 $[\mu]=40^\circ$, $\theta_{\max}=25.2^\circ$,最大的 θ 发生于 $\psi=\theta$ 的I型机构;如 $[\mu]=40^\circ$, $\psi=60^\circ$, I型机构最大的 θ 只能为 17° 。

c. 图2所示的设计线图^[1]有较大的错误;图3所示的设计线图^[2]是正确的,但精度较差。它们的图解法都基于运动几何学理论不易为一般设计人员所接受,且在I型机构 $\psi=\theta$ 时,又无法按图1所示的图解法求解,必须采用特殊的图解法^[3,7]。本文所推荐的方法不仅无上述弊端还更简捷和易于接受。

因此本文所提供的设计方法和线图具有实用价值和易于推广。

参 考 文 献

1. И. И. 阿尔托包列夫斯基等著, 孙可宗等译, 平面机构综合(下), 人民教育出版社, 1982; 353-354
2. Willibald Lichtenheldt. Konstruktionslehre Der Getriebe. Akademie-verlag, Berlin, 1961; 194-195
3. Khare A K, Dave R K. Optimizing 4-bar crank-rocker mechanism. Mechanism and Machine Theory, 1979; (14)5: 319-325
4. 蒋学全. 按 K , ψ 和 $\gamma_{\min}$ 综合曲柄摇杆机构的解析法. 机械设计, 1986; 3: 31-37
5. 于佩政. 按行程速比系数设计平面曲柄摇杆机构的解析法. 机械科学与技术, 1988; 1: 30-35
6. 王长钧. 平面四杆急回机构按最佳传动角的设计. 机械设计, 1988; 1: 1988
7. 李学荣. 四连杆机构综合概论(第二册). 人民教育出版社, 1966
8. 伦铭. 间歇运动机构的研究, 无锡轻工业学院硕士学位论文. 1989

The Crank—Rocker Mechanism Design with Optimum Transmission Angle upon the Given ψ and K

Leu Yonghou Lun Ming

(Dept. of Mechan. Eng.)

Abstract The crank-rocker mechanism design with optimum transmission angle according to the rocker oscillating angle ψ and θ between two limiting positions (or coefficient of travel speed variation K) has been more deeply studied by using analytical method based on the general graphical method in this paper. The resulting equations and chart show that Alt's chart is far from right, Lichtenheldt's is basically correct but with low precision and in some cases unable to give solution directly. The chart and design procedure presented in this paper gives correct results with necessary precision, easy to practice and with wide acceptability as well.

Key words crank-rocker mechanism; transmission angle; coefficient of travel speed variation; crank angle between two limiting positions