

# 树形多刚体系统 动力学方程的简明形式

王永安

(机械工程系)

**摘要** 将 Kane 方法和 Roberson/Wittenburg 图论工具相结合,用于建立树形多刚体系统动力学方程。所得方程形式简明,能明确反映系统的结构特征。文中给出的系统接点约束方程,为用正交补阵处理接点约束创造了条件。

**关键词** 多刚体系统动力学;树形多刚体系统;Kane 方法

## 0 前 言

多刚体系统动力学受现代工程技术的推动而迅速发展。树形多刚体系统由于是研究一般多刚体系统的基础,因而引起人们更多的注意。现有的主要方法中 Roberson/Wittenburg 方法<sup>[1]</sup>是用图论工具描述系统的联接构造,用广义坐标表示系统位形,所得方程因引入较多的中间量而有碍理解。旋量矩阵法<sup>[2]</sup>基本属于 Roberson/Wittenburg 体系,有其一定优点,但动量矩方程对铰接点列出显然不够简洁。

Huston 方法<sup>[3]</sup>用低序体阵列描述系统联接构造,结合 Kane 方法建立系统动力方程。该方法有较大的选择广义(伪)坐标的自由。当选用相对坐标时能有效处理接点约束,但方程中因此包含有变换矩阵元及其导数,增加了方程求解的复杂性。另外用低序体阵列表示系统联接构造,显然不如用图工具表示直观。

本文旨在用 Kane 方法结合图论工具来导出树形多刚体系统形式简明的动力学方程。

## 1 运动学

用图 1 所示的各位置矢量决定各刚体质心位置和体间相对移动。

图中  $O$  为惯性参考系  $R$  的原点,  $O_i$  表示刚体  $B_i$  上选定的铰点,  $A_i$  为  $B_i$  相邻的低序体  $B_j(j=L(i))$  上适当选定的点,  $C_i$  为  $B_i$  的质心。  $\vec{P}_i$  固联于  $B_j(j=L(i))$ ,  $\vec{v}_i$  固联于  $B_i$ ,  $\vec{q}_i$  则度量体间相对移动。

1.1 质心的位置矢量

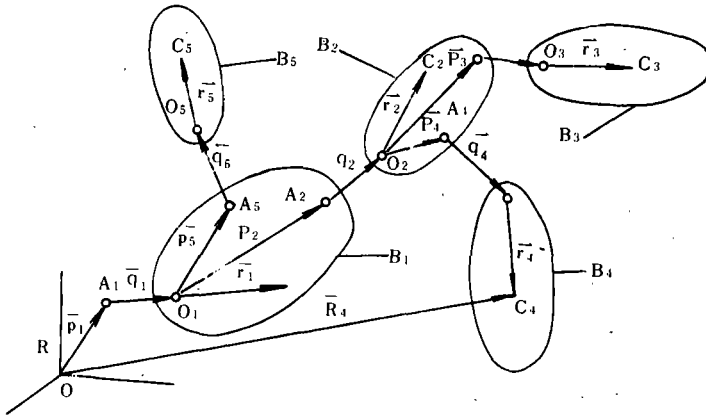


图1 位置矢量示例

$\vec{R}_i$  表示质心  $C_i$  对固定点  $O$  的位置矢量(见图1)。当采用本文的规则标号法时(有向图见图2示例)则可将系统各刚体质心位置矢量为:

$$\vec{R} = T^T(\vec{P} + \vec{q}) + \vec{\gamma} \tag{1}$$

其中  $T$  为系统的通路矩阵,  $\vec{R}, \vec{P}, \vec{q}, \vec{\gamma}$  为由相应的  $n$  个矢量元构成的矢量列阵。例如  $\vec{R} = [\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_n]^T, n$  为系统刚体的个数。

1.2 质心速度

(1)式对  $t$  求导,得各质心速度矢量列阵

$$\dot{\vec{V}} = T^T(\dot{\vec{P}} + \dot{\vec{q}}) + \dot{\vec{\gamma}} \tag{2}$$

按矢量矩阵乘法,若记  $\text{diag}[\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_n] = \dot{\vec{\gamma}}$ , 则  $\dot{\vec{\gamma}}$  为

$$\dot{\vec{\gamma}} = -\dot{\vec{\gamma}} \times \vec{\omega} \tag{3}$$

其中  $\vec{\omega} = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$  为各刚体角速度列阵。

定义1 系统低序体关联矩阵  $D$ , 它的元为

$$d_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{若弧 } j \text{ 指向顶点 } i \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

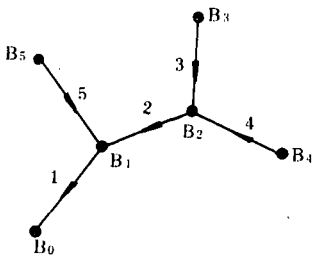


图2 示例的有向图

容易验证

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{P}} \times (D^T \vec{\omega}) \tag{4}$$

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}} \times (D^T \vec{\omega}) + \vec{q}' \tag{5}$$

其中  $\vec{q}'$  为各刚体间  $A_i, O_i (i=1 \cdots n)$  点相对速度列阵。将(3), (4), (5)式代入(2)式得

$$\vec{V} = [T^T(\overset{\wedge}{P} + \overset{\wedge}{q})\overset{\wedge}{D}^T - \overset{\wedge}{\gamma}] \times \vec{\omega} + T^T \vec{q}' \quad (6)$$

记  $\bar{\rho} = \bar{P} + \bar{q}$  及  $A(\bar{\rho} \cdot \bar{\gamma}) = T^T \overset{\wedge}{\rho} \overset{\wedge}{D}^T - \overset{\wedge}{\gamma}$ , 则  $\bar{V}$  可表为

$$\bar{V} = A(\bar{\rho} \cdot \bar{\gamma}) \times \vec{\omega} + T^T \vec{q}' \quad (7)$$

按本文的规则标号,  $T$  为上三角矩阵,  $D$  为严格上三角矩阵, 且有  $D = S - E$ ,  $S$  为系统的关联矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 于是  $T^T \overset{\wedge}{\rho} \overset{\wedge}{D}^T$  为严格下三角矩阵。这样可按如下步骤来构成  $A(\bar{\rho} \cdot \bar{\gamma})$ 。

- a. 将系统按本文方法规则标号。
- b. 由  $D = S - E$  求得  $D$ 。
- c. 将  $D^T$  的第  $i$  行的唯一非零元  $-1$  用  $-\bar{\rho}_i = -(P_i + q_i)$  代替, 得矩阵记为  $D^T(\bar{\rho})$ 。
- d. 计算  $T^T D^T(\bar{\rho})$ 。
- e. 将  $T^T D^T(\bar{\rho})$  的第  $i$  个零对角元用  $-\bar{\gamma}_i$  代替即可得  $A(\bar{\rho} \cdot \bar{\gamma})$ 。

例如对图 1 所示系统其  $A(\bar{\rho} \cdot \bar{\gamma})$  为

$$A(\bar{\rho} \cdot \bar{\gamma}) = - \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1 & & & & O \\ -\bar{\rho}_2 & \bar{\gamma}_2 & & & \\ -\bar{\rho}_2 & \bar{\rho}_3 & \bar{\gamma}_3 & & \\ -\bar{\rho}_2 & \bar{\rho}_4 & O & \bar{\gamma}_4 & \\ -\bar{\rho}_5 & O & O & O & \bar{\gamma}_5 \end{bmatrix}$$

各刚体质心速度的坐标列阵可表为

$$\underline{V} = A(\tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma}) \underline{\omega} + T(E) \underline{q}' \quad (8)$$

其中

$$\underline{V} = [V_{11}, V_{12}, V_{13}, \dots, V_{n1}, V_{n2}, V_{n3}]^T$$

$\underline{\omega} \underline{q}'$  亦类同。

$A(\tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma})$  为将矢量矩阵  $A(\bar{\rho} \cdot \bar{\gamma})$  中的零元用  $3 \times 3$  零矩阵代替, 矢量元  $\bar{\rho}_i, \bar{\gamma}_i$  用相应的反对称坐标方阵代替后所得的  $3n \times 3n$  方阵。

例如

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} O & -\rho_{13} & \rho_{12} \\ \rho_{13} & O & -\rho_{11} \\ -\rho_{12} & \rho_{11} & O \end{bmatrix}$$

$T(E)$  为将矩阵  $T$  中的 1 元用  $3 \times 3$  单位矩阵  $E$  代替, 零元用  $3 \times 3$  零矩阵代替后所得

的  $3n \times 3n$  方阵。

### 1.3 质心加速度

(6)式对时间  $t$  求导,得各质心加速度列阵为

$$\ddot{\bar{a}} = [T^T(\dot{\rho} + \dot{q})D^T - \dot{\gamma}] \times \dot{\bar{\omega}} + [T^T(\dot{\rho} + \dot{q})D^T - \dot{\gamma}] \times \dot{\bar{\omega}} + T^T(\ddot{q}'' + \dot{q}'D^T \times \dot{\bar{\omega}})$$

记  $\dot{\bar{X}} = \dot{\bar{P}} + \dot{\bar{q}} + \dot{\bar{q}}' = \dot{\bar{P}} \times D^T \dot{\bar{\omega}} + 2\dot{\bar{q}}'$ , 并经整理得

$$\ddot{\bar{a}} = (T^T \dot{\bar{X}} D^T - \dot{\gamma}) \times \dot{\bar{\omega}} + (T^T \dot{\rho} D^T - \dot{\gamma}) \times \dot{\bar{\omega}} + T^T \ddot{q}''$$

采用矢量元矩阵  $A(\bar{X} \cdot \bar{\gamma})$  表示

$$\ddot{\bar{a}} = A(\bar{X} \cdot \bar{\gamma}) \times \dot{\bar{\omega}} + A(\dot{\rho} \cdot \bar{\gamma}) \times \dot{\bar{\omega}} + T^T \ddot{q}'' \quad (9)$$

质心加速度之坐标列阵为

$$\underline{\ddot{a}} = A(\tilde{X}, \tilde{\gamma}) \underline{\dot{\omega}} + A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \underline{\dot{\omega}} + T(E) \underline{\ddot{q}}'' \quad (10)$$

矩阵  $A(\tilde{X}, \tilde{\gamma})$  的构成也类同于  $A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma})$ , 其  $3 \times 3$  非零子块为

$$\tilde{X}_i = \underline{\omega}_{L(i)} \underline{\rho}_i^T - \underline{\rho}_i \underline{\omega}_{L(i)}^T + 2\tilde{q}_i'' \quad (i = 2, \dots, n) \quad (11)$$

其中  $\underline{\omega}_{L(i)}$  为  $-D^T(E)\underline{\omega}$  的第  $3i-2, 3i-1, 3i$  元构成的列阵,  $D(E)$  的构成类同于  $T(E)$ .

$$\tilde{\gamma}_i = \underline{\gamma}_i \underline{\omega}_i^T - \underline{\omega}_i \underline{\gamma}_i^T \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

## 2 广义惯性力

### 2.1 等效惯性力系

将刚体  $B_i$  的惯性力系向质心  $C_i$  简化, 可得惯性力系主矢  $\bar{F}_i^*$  和主矩  $\bar{T}_i^*$  ( $i=1, \dots, n$ ). 将  $\bar{F}_i^*, \bar{T}_i^*$  依序排列并用(10)式, 可得系统各刚体惯性力主矢坐标列阵为

$$\underline{\bar{F}}^* = -\hat{M} \left[ \begin{array}{c} \underline{\dot{\omega}} \\ [A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \quad T^T(E)] \\ \underline{\ddot{q}}'' \end{array} \right] + A(\tilde{X}, \tilde{\gamma}) \underline{\dot{\omega}} \quad (13)$$

其中  $\hat{M} = \text{diag}[m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n]$

各刚体惯性力主矩坐标列阵为

$$\underline{\bar{T}}^* = -\hat{I} \underline{\dot{\omega}} - \tilde{\omega} \hat{I} \underline{\dot{\omega}} \quad (14)$$

其中  $\hat{I} = \text{diag}(I_1, \dots, I_n)$ ,  $I_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 为  $B_i$  的中心惯量张量矩阵,  $\tilde{\omega} \hat{I} = \text{diag}(\tilde{\omega}_1 I_1, \dots, \tilde{\omega}_n I_n)$ .

(13), (14)式合并为

$$\begin{bmatrix} \underline{F}^* \\ \underline{T}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{M} A(\tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma}) & \hat{M} T^T(E) \\ \hat{I} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{q}'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{M} A(\tilde{X} \cdot \tilde{\gamma}) \\ \hat{\omega} I \end{bmatrix} \underline{\omega} \quad (15)$$

### 2.2 广义惯性力

若取广义速率  $y_l (l=1 \dots 6n)$  为

$$\left. \begin{aligned} y_l &= \omega_{kb} \quad l = 3(k-1) + b \\ y_l &= q''_{kb} \quad l = 3(n+k-1) + b \end{aligned} \right\} (k = 1 \dots n; b = 1, 2, 3)$$

则系统广义惯性力为<sup>[3]</sup>

$$G_l^* = \frac{\partial \underline{V}_k}{\partial y_l} \cdot \underline{F}_k^* + \frac{\partial \omega_k}{\partial y_l} \cdot \underline{T}_k^* \quad (l = 1 \dots 6n) \quad (16)$$

式中重复下标  $k$  表示对  $k$  从 1 到  $n$  求和(下同)。

为了导出系统广义惯性力的表达式,现导出  $G_l^* (l=1 \dots 6n)$  中对应于第  $i$  号刚体的相继三项  $G_{3(i-1)+b}^* (b=1, 2, 3)$ . 由(7)式知

$$\underline{V}_k = \underline{A}_{kj} \times \underline{\omega}_j + t_{kj} q''_j$$

式中  $\underline{A}_{kj}$  代表  $A(\tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma})$  的矢量元,  $t_{kj}$  为  $T^T$  的元. 以  $\underline{e}_b (b=1, 2, 3)$  表示惯性参考系  $R$  的三个正交单位矢, 则

$$\frac{\partial \underline{V}_k}{\partial y_{3(i-1)+b}} = \underline{A}_{kj} \times \underline{e}_b \quad (b = 1, 2, 3) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial y_{3(i-1)+b}} = \delta_{ik} \underline{e}_b \quad (b = 1, 2, 3) \quad (18)$$

式中  $\delta_{ik}$  为 Kronecker's delta 函数. 将(17), (18)代入(16)得

$$G_{3(i-1)+b}^* = (\underline{A}_{ki} \times \underline{e}_b) \cdot \underline{F}_k^* + \delta_{ik} \underline{e}_b \cdot \underline{T}_k^* = \underline{e}_b^T \underline{A}_{ki}^T \underline{F}_k^* + \underline{e}_b^T \underline{T}_k^* \quad (b = 1, 2, 3)$$

从上三式用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} G_{3i-2}^* \\ G_{3i-1}^* \\ G_{3i}^* \end{bmatrix} = \underline{A}_{ki}^T \underline{F}_k^* + \underline{T}_k^*$$

设  $\underline{G}_i^* = [G_1^* \dots G_{6n}^*]^T$  则

$$\underline{G}_i^* = A^T(\tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma}) \underline{F}^* + \underline{T}^* \quad (19)$$

同理可得

$$\underline{G}_i^* = [G_{3n+1}^* \dots G_{6n}^*]^T = T(E) \underline{F}^* \quad (20)$$

(19), (20)合并为

$$\underline{G}^* = \begin{bmatrix} \underline{G}_1^* \\ \dots \\ \underline{G}_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T(\tilde{\rho} \cdot \tilde{\gamma}) & E \\ T(E) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}^* \\ \dots \\ \underline{T}^* \end{bmatrix} \quad (21)$$

上式系数矩阵右上角的  $E$  为  $3n \times 3n$  单位矩阵。

将(15)代入(21)并整理得系统广义惯性力坐标阵为

$$\begin{aligned}
 \underline{G}^* = & - \left[ \begin{array}{c|c} A^T(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \hat{M} A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) + \hat{I} & A^T(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \hat{M} T^T(E) \\ \hline T(E) \hat{M} A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) & T(E) \hat{M} T^T(E) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{\ddot{q}}'' \end{bmatrix} \\
 & - \left[ \begin{array}{c} A^T(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \hat{M} A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) + \hat{\omega} I \\ \hline T(E) \hat{M} A(\tilde{X}, \tilde{\gamma}) \end{array} \right] \underline{\omega}
 \end{aligned} \tag{22}$$

### 3 广义主动力

作用于树形多刚体系统的主动动力是除铰内理想约束反力以外的所有外力。针对工程应用,把主动力分为通过铰作用的主动动力,称为铰主动力,其余的主动动力则称为非铰主动力。设通过第  $k$  个铰主动力对铰点  $O_k$  的主矢、主矩分别为  $\underline{F}_k^{(a)}, \underline{T}_k^{(a)}$ ;非铰主动力对  $B_k$  的质心  $C_k$  的主矢、主矩分别为  $\underline{F}_k, \underline{T}_k$ 。

#### 3.1 广义铰主动力

广义铰主动力的一般表达式为<sup>[3]</sup>

$$\underline{G}_l^{(a)} = \frac{\partial \underline{q}'_k}{\partial y_l} \cdot \underline{F}_k^{(a)} + \frac{\partial (\underline{\omega}_k - \underline{\omega}_{l(k)})}{\partial y_l} \cdot \underline{T}_k^{(a)} \quad (l = 1 \dots 6n) \tag{23}$$

当  $l = 1 \dots 3n$  时

$$\frac{\partial \underline{q}'_k}{\partial y_l} = 0 \tag{24}$$

因为  $\underline{\omega}_k - \underline{\omega}_{l(k)}$  为  $S^T \underline{\omega}$  的第  $k$  个元,则

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (\underline{\omega}_k - \underline{\omega}_{l(k)})}{\partial y_l} \cdot \underline{T}_k^{(a)} &= \frac{\partial (S^T \underline{\omega})}{\partial y_l} \cdot \underline{T}_k^{(a)} = \frac{\partial \underline{\omega}^T}{\partial y_l} S(E) \underline{T}_k^{(a)} \\
 &= \underline{e}_l^T S(E) \underline{T}_k^{(a)} = S_l(E) \underline{T}_k^{(a)}
 \end{aligned} \tag{25}$$

式中  $\underline{e}_l^T = [0, \dots, 0, 1_{\text{第}l\text{列}}, 0, \dots, 0]$ ;  $S_l(E)$  为  $S(E)$  之第  $l$  行。

(24), (25)式代入(23)式得

$$\underline{G}_l^{(a)} = S_l(E) \underline{T}_k^{(a)} \quad (l = 1 \dots 3n)$$

$3n$  个等式用矩阵表为

$$\underline{G}_1^{(a)} = [G_1^{(a)} \dots G_{3n}^{(a)}]^T = S(E) \underline{T}_k^{(a)} \tag{26}$$

同理可得

$$\underline{G}_n^{(a)} = [G_{3n+1}^{(a)} \dots G_{6n}^{(a)}]^T = \underline{F}_k^{(a)} \tag{27}$$

(26), (27)合并为

$$\underline{G}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \underline{G}_1^{(\alpha)} \\ \underline{G}_2^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & S(E) \\ E & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}^{(\alpha)} \\ \underline{T}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

### 3.2 广义非铰主动力

仿照广义惯性力的计算结果, 广义非铰主动力为

$$\underline{G} \begin{bmatrix} A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) & E \\ T(E) & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{T} \end{bmatrix} \quad (29)$$

## 4 动力学方程

设  $\underline{G}^{(N)} = [\underline{G}_1^{(N)} \dots \underline{G}_n^{(N)}]^T$  为与铰内理想约束力相对应的广义力, 则 Kane 方程为

$$\underline{G}^* + (\underline{G} + \underline{G}^{(\alpha)}) + \underline{G}^{(N)} = 0 \quad (30)$$

将(22), (28), (29)式代入(30)式并经整理得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A^T(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \hat{M} A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) + \hat{I} & A^T(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \hat{M} T^T(E) \\ T(E) \hat{M} A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) & T(E) \hat{M} T^T(E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{q}'' \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} A^T(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) \hat{M} A(\tilde{X}, \tilde{\gamma}) + \tilde{\omega} \hat{I} \\ T(E) \hat{M} A(\tilde{X}, \tilde{\gamma}) \end{bmatrix} \underline{\omega} + \begin{bmatrix} A(\tilde{\rho}, \tilde{\gamma}) & E \\ T(E) & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{T} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \underline{0} & S(E) \\ E & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}^{(\alpha)} \\ \underline{T}^{(\alpha)} \end{bmatrix} + \underline{G}^{(N)} \end{aligned} \quad (31)$$

## 5 约束方程

由于铰的运动学约束,  $6n$  个广义速率并不独立, 方程(31)需联列相应的约束方程才可求解。现导出系统的约束方程。

### 5.1 转动约束方程

5.1.1  $B_i B_j (j = L(i))$  间的铰  $i$  无转动自由度  
则

$$\underline{\omega}_i = \underline{\omega}_j$$

或表为

$$E(\underline{\omega}_i - \underline{\omega}_j) = 0 \quad (32)$$

此处  $E$  为  $3 \times 3$  单位矩阵。

5.1.2  $B_i, B_j (j=L(i))$  间的铰  $i$  有一个转动自由度 转轴单位矢为  $\vec{h}_i$ , 则  $\vec{\omega}_i$  可表为

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j + \varphi_i \vec{h}_i \tag{33}$$

$\varphi_i$  为绕转轴的角。(33)式的分量式为

$$\omega_{ik} = \omega_{jk} + \varphi_i h_{ik} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{34}$$

由(33)式解得  $\varphi_i = \vec{h}_i \cdot (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j)$  并代入(34)式得

$$\omega_{ik} = \omega_{jk} + h_{ik} \vec{h}_i \cdot (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j) \quad (k = 1, 2, 3) \tag{35}$$

容易验证,三个方程中仅有两个独立,取开头两个并表示为

$$(h_{ik} - \varphi_i h_{is}) (\omega_{is} - \omega_{js}) = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{36}$$

(36)式中对重复下标  $s$  从 1 到 3 求和。(36)式用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} h_{i1} - h_{i1}^{-1} & h_{i1} & h_{i1} \\ h_{i2} & h_{i2} - h_{i2}^{-1} & h_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ h_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i1} - \omega_{j1} \\ \omega_{i2} - \omega_{j2} \\ \omega_{i3} - \omega_{j3} \end{bmatrix}$$

5.1.3  $B_j, B_j (j=L(i))$  间的铰  $i$  有两个转动自由度 两转轴单位矢为  $\vec{h}_i^{(1)}, \vec{h}_i^{(2)}$ , 相应的绕轴转角为  $\varphi_i, \psi_i$ , 则

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j + \varphi_i \vec{h}_i^{(1)} + \psi_i \vec{h}_i^{(2)}$$

上式点乘  $\vec{h}_i^{(1)} \times \vec{h}_i^{(2)}$  得约束方程为

$$\vec{h}_i^{(1)} \times \vec{h}_i^{(2)} \cdot (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j) = 0$$

该约束方程用坐标矩阵表示为

$$\vec{h}_i^{(1)T} \times \vec{h}_i^{(2)} \cdot (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j) = 0$$

5.1.4 整个系统的转动约束方程的形成

定义 2 系统转动约束关联矩阵  $R(E)$  为系统关联矩阵  $S$  中划去无转动约束铰所在的列,将元素 1 用  $3 \times 3$  单位代替,0 用  $3 \times 3$  零矩阵代替后所得矩阵的转置矩阵。

定义 3 系统转轴约束系数矩阵  $\hat{H}$  为由以下  $H_i$  子块组成的拟对角矩阵

$$H_i = \begin{cases} 3 \times 3 \text{ 单位矩阵 } E & \text{若铰 } i \text{ 无转动自由度} \\ \begin{bmatrix} H_{i1} - h_{i1}^{-1} & h_{i1} & h_{i1} \\ h_{i2} & h_{i2} - h_{i2}^{-1} & h_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ h_{i3} \end{bmatrix} & \text{若铰 } i \text{ 有一个转动自由度} \\ \vec{h}_i^{(1)T} \times \vec{h}_i^{(2)} & \text{若铰 } i \text{ 有二个转动自由度} \end{cases}$$

下标取值序列,  $i=1 \dots n$ , 为系统  $n$  个铰中除去无转动约束铰号后,从小到大依序排列并重新依次编号所得序列。

据此,系统约束方程可表为

$$\hat{H} R(E) \vec{\omega} = 0 \tag{37}$$



### 5.2 移动约束方程

可用类似转动约束方程导出系统移动约束方程。

**定义 4** 系统移动约束关联矩阵  $U(E)$  是将一个  $n \times n$  单位矩阵, 划去与无移动约束铰标号相同的行, 并将元素 1 用  $3 \times 3$  单位矩阵代替, 0 用  $3 \times 3$  零矩阵代替后所得的矩阵。

**定义 5** 系统移动轴约束系数矩阵  $\hat{K}$  为由以下  $K_i$  子块所组成的拟对角矩阵。

$$K_i = \begin{cases} 3 \times 3 \text{ 单位矩阵 } E & \text{若铰 } i \text{ 无移动自由度} \\ \begin{bmatrix} K_{i1} - K_{i1}^{-1} & K_{i1} & K_{i1} \\ K_{i2} & K_{i2} - K_{i2}^{-1} & K_{i2} \\ K_{i3} & K_{i3} & K_{i3} \end{bmatrix} & \text{若铰 } i \text{ 有一个移动自由度} \\ \begin{matrix} K_i^{(1)r} & \tilde{K}_i^{(2)} \end{matrix} & \text{若铰 } i \text{ 有二个移动自由度} \end{cases}$$

下标取值序列,  $i=1 \dots n_i$  为系统  $n$  个铰中除去无移动约束铰号后, 从小到大依序排列并重新依次编号所得序列。  $K_{ib} (b=1, 2, 3)$  为有一个移动自由度铰的移动轴方向数;  $K_i^{(1)}, K_i^{(2)}$  有二个移动自由度铰的移动轴单位矢坐标列阵。

据此, 系统移动约束方程可表示为

$$\hat{K} U(E) \underline{q} = 0 \tag{38}$$

### 5.3 系统约束方程

合并(37), (38)式得系统的约束方程为

$$\begin{bmatrix} \hat{H} & R(E) & 0 \\ 0 & \hat{K} U(E) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{q}' \end{bmatrix} = 0 \tag{39}$$

## 6 结束语

方程(31)和(39)是分析树形多刚体系统的基本方程。该方程形式简明, 直观, 能明确反映系统的联接构造, 对数值计算和非数值分析都适用。列写方程的手续也较简便。约束方程的形式适合于用构造正交补阵的方法<sup>[4]</sup>消去方程(31)中的铰内理想约束力, 把方程变换为独立坐标表示的形式。

如果一般约束多刚体系统的构造约束和外部约束可表为坐标导数的线性形式, 则附加这些约束方程, 就得到一般约束多刚体系统的基本方程。

虽然已有许多建立多刚体系统动力学方程的方法, 但笔者认为, 根据适当的力学原理, 选取适当的广义(伪)坐标和系统结构表示方法, 以期得出简明、直观、便于应用的系统动力学方程, 仍是值得探讨的问题。

## 参 考 文 献

- 1 Wittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies, B G Teubner, 1977(谢传铎译,多刚体系统动力学.北京航空学院出版社,1986)
- 2 刘延柱.多刚体系统动力学的旋量-矩阵方法.力学学报,1988;20(4):335-343
- 3 休斯敦 R L,刘又午.多刚体系统动力学.天津大学出版社,1991
- 4 Kamman J W, Huston R L. Dynamics of Constrained Multibody Systems, ASME, Journal of Applied Mechanics, 1984; 55: 899

### A Concise form of Dynamical Equations For Multirigid-Body Systems with Tree Structure

Wang Yongan

(Dept. of Mech. Eng.)

**Abstract** By combining the Kane's method with the tool of graph theory in Roberson/Wittenberg formalism, formulates the dynamical equations of multirigid-body systems with tree structure. The form of obtained equations is concise. It can reflect explicitly the structural characteristics of systems. The joint constraint equations of the systems are given, that creates the condition to treat the joint constraint by using the orthogonal complement array.

**Key-words** dynamics of multibody system; Multirigid-body system with tree structure; Kane's method