

Hamilton-连通图的一个充分条件

查起兆 吴正声

(无锡轻工业学院) (南京师范大学)

摘要 证明了下列结论, 设 G 是 k -连通的 n 阶无环图, $k \geq 2$, 若对 G 中任意 k -独立集, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$, 有 $\sum_{i=0}^{k-1} |N(X - x_i)| > (k-1)n$, 则 G 为 Hamilton-连通图。

关键词 Hamilton-连通图; k -连通图; k -独立集

0 引言

本文涉及的图都是无环的(但可能有重边的)无向图。

设 G 是一个图, 总用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, 设 $x \in V(G)$, 其邻点集 $N(x) = \{V | V \in V(G), Vx \in E(G)\}$, 又设 $X \subseteq V(G)$, 其邻点集 $N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x)$ 。

1986 年 P. Fraisse 推广了 R. J. Fovdree 等人的结论^[1], 证明了下列定理:

定理 A^[2] 设 G 是 n 阶的 k -连通图, $k \geq 2$, 若对于任意 k -独立集 S , 有 $|N(S)| > \frac{k(n-1)}{k+1}$

则 G 是 HamiHonl 图。

众所周知, 图 G 称为 HamiHon-连通图, 如果对于任意 $\{x, y\} \subseteq V(G)$, 总有以 x, y 为端点的 HamiHon-路

本文将类似于定理 A, 得到下列定理:

定理 1 设 G 是 n 阶 k -连通图, $k \geq 2$ 若对于任意 $(k-1)$ -独立集 S , 有 $|N(S)| > \frac{(k-1)n}{k}$

则 G 是 HamiHon-连通图。

根据 Bondy 的图论整性原则仿照田丰最近的一种方法, 证明比定理 1 强的下列定理:

定理 2 设 G 是 n 阶 k -连通图, $k \geq 2$ 若对于任意 k -独立集 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$, 有

$\sum_{i=0}^{k-1} |N(X \setminus \{x_i\})| > (k-1)n$, 则 G 是 HamiHon-连通图。

收稿日期: 1992-03-02

1 定理 2 的证明

在本文中,总将路看作有方向的, (x,y) -路 Q 总认为其方向是从 x 到 y ,设 z_1, z_2 是 Q 上的二个顶点,且按其方向 z_1 先于 z_2 ,总用 $z_1 Q z_2$ 表示从 z_1 沿着 Q 顺向到 z_2 的路;用 $z_2 \bar{Q} z_1$ 表示从 z_2 沿 Q 逆向到 z_1 的路。

下面用反证法证明定理 2 成立。

假设 G 满足定理 2 的条件,但不是 HamiHon-连通图,则存在 $\{u, v\} \subseteq V(G)$,不存在以 u, v 为端点的 HamiHon-路,设 P 为 G 中最长的 (u, v) -路,则 $R = V(G) \setminus V(P) \neq \emptyset$,取 $x_0 \in R$,因 G 是 k -连通的。由 Menger 定理,存在以 x_0 为起点的 k 条路 $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ 连到 $V(P)$,且这 k 条路除 x_0 外,其顶点两两不相交,不妨设 $V(P) \cap V(Q_i) = \{a_i\} (i=1, 2, \dots, k)$,即 Q_i 为 (x_0, a_i) -路,并且, $a_1, a_2, \dots, a_k$ 以 P 的方向依次排列着,对于 $i=1, 2, \dots, k-1$,设 x_i 为 P 上 a_i 的后继顶点,令 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$,且设 $A = V(G) \setminus N(X)$, $A_P = A \cap V(P)$, $A_R = A \cap R (= A \setminus V(P))$, $B = \{v | v \in V(G), \text{存在唯一的 } i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, \text{使 } v x_i \in E(G)\}$, $B_P = B \cap V(P)$, $B_R = B \cap R (= B \setminus V(P))$, $D = V(G) \setminus (A \cup B)$,也就是 A 为与 X 中任一顶点不相邻的所有顶点所组成的集合, B 为恰与 X 中一个顶点相邻的所有顶点组成的集合, D 为至少与 X 中两个顶点相邻的顶点所组成的集合。下面以一系列引理,来推得矛盾,从而证明定理的结论。

引理 1 设 $y \in V(Q) \setminus \{a_i\} (i=1, 2, \dots, k-1)$, 则 $y \notin N(x_i)$, 从而 $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} N(x_i)$ 。

证:用反证法,设 $y \in N(x_i)$ 。便有比 P 更长的 (u, v) -路 $u P a_i \bar{Q}_i y x_i P v$, 矛盾。

引理 2 $X \subseteq A$ 。从而, X 为 G 的 k -独立集, 且 $x_0 \in A_R$ 。

证:由引理 1, $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} N(x_i)$, 于是, 只要证明, 对于任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\} (i < j)$, 有 $x_i x_j \in E(G)$ 。用反证法, 设 $x_i x_j \notin E(G)$, 便有比 P 更长的 (u, v) -路, $u P a_i \bar{Q}_i x_0 \bar{Q}_j a_j \bar{P} x_j P v$, 矛盾。

引理 3 设 $\{x_i, x_j\} \subseteq X (i < j)$, 则 $N(x_i) \cap N(x_j) \cap R = \emptyset$ 。

从而, $B_R = R \setminus A_R = V(G) \setminus V(P) \setminus A_R$ 。

证:用反证法, 设 $y \in N(x_i) \cap N(x_j) \cap R$ 。分两种情形讨论。

情形 1 当 $i=0$ 时, 由引理 1, $y \notin V(Q_j)$, 便有比 P 更长的 (u, v) -路 $u P a_j \bar{Q}_j x_0 y x_j P v$, 矛盾。

情形 2 当 $i \neq 0$ 时, 不妨设 $i < j$, 由引理 1 $y \notin V(Q_i) \cup V(Q_j)$, 便有比 P 更长的 (u, v) -路 $u P a_i \bar{Q}_i x_0 \bar{Q}_j a_j \bar{P} x_j P v$, 矛盾。

为了方便起见, 设 $w \in V(P)$, 用 $w^{(+)}$ 表示 w 沿着 P 方向的后一个顶点, 此时 $w \neq v$; 用 $w^{(-)}$ 表示沿着 P 方向的前一个顶点。

引理 4 设 $x_i, x_j \in X - \{x_0\} (i < j)$, 则:

(1) 当 $w \in (u P a_i)$ 时 (表示路 $u P a_i$ 上所有顶点所组成的集合), 不能同时有 $w x_i, w^{(+)} x_j \in E(G)$;

(2) 当 $w \in V(x_i P a_j)$ 时, 不能同时有 $w^{(+)} x_i, w x_j \in E(G)$;

(3) 当 $w \in V(x_j P v)$ 时, 不能同时有 $w x_i, w^{(+)} x_j \in E(G)$ 。

证:

(1) 当 $w = a_i$ 时, 由引理 2 $w^{(+)} x_j = x_j, x_j \in E(G)$ 结论成立。

当 $w \neq a_i$ 时, 用反证法, 设 $w x_i, w^{(+)} x_i \in E(G)$, 便有比 P 更长的 (u, v) -路 $u P w x_i P a_j \bar{\theta}_i x_0 \theta_j a_i \bar{P} w^{(+)} x_i P v$. 矛盾。

(2) 当 $w = a_j$ 时由引理 2, $w^{(+)} x_i = x_j x_i \in E(G)$ 结论成立。

当 $w \neq a_j$ 时, 用反证法, 设 $w^{(+)} x_i, w x_j \in E(G)$. 使有比 P 更长的 (u, v) -路 $u P a_i \bar{\theta}_i x_0 \theta_j a_j \bar{P} w^{(+)} x_i P w x_j P v$. 矛盾。

(3) 用反证法, 设 $w x_i, w^{(+)} x_j \in E(G)$, 便有比 P 更长的 (u, v) -路 $u P a_i \bar{Q}_i x_0 Q_j a_j \bar{P} x_i w \bar{P} x_j w^{(+)} P v$. 矛盾。

引理 5 设 $x_i \in X \setminus \{x_0\}, w \in V(P) \setminus \{v\}$, 则不能同时有 $x_0 w, x_i w^{(+)} \in E(G)$.

证: 当 $w = a_i$ 时, 因 G 无环 $x_i w^{(+)} = x_i x_i \notin E(G)$, 结论显然成立。

当 $w \neq a_i$ 时, 用反证法, 设 $x_0 w, x_i w^{(+)} \in E(G)$, 便有比 P 更长的 (u, v) -路

$$P = \begin{cases} u P w x_0 Q_i a_i \bar{P} w^{(+)} x_i P v & (w \text{ 在 } P \text{ 上前于 } a_i) \\ u P a_i \bar{Q}_i x_0 w \bar{P} x_i w^{(+)} P v & (w \text{ 在 } P \text{ 上后于 } a_i) \end{cases} \quad \text{矛盾。}$$

设 $A_P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} (m = |A_P|)$, 且. 设 $a_1, a_2, \dots, a_m$, 以 P 的方向依次排列着. 由引理 2. $X \setminus \{x_0\} \subseteq A_P$.

引理 6

(1) 当 $a_1 \neq u$, $|D \cap V(u p a_1)| \leq k-1$

(2) $|D \cap V(a_i p a_{i+1})| \leq k-1 (i=1, 2, \dots, m-1)$

(3) 当 $a_m = v$ 时, $|D \cap V(a_m p v)| \leq k-1$.

证:

(1) 由引理 1, $x_i \in A_P$, 于是路 $u p a_1$ 必是路 $u P x_1$ 的子路, 又注意到 $V(u p a_1) \setminus \{a_1\}$ 中的每个顶点必与 X 中至少一个顶点相邻. 因此由引理 4, 5 不难看出, 在路 $u p a_1$ 上除 a_1 外其余的顶点以如下次序排列着: $N(x_{k-1}), N(x_{k-2}), \dots, N(x_1), N(x_0)$. 其中可能有些是空集. 并且, 相邻的两非空集间, 至多有一个公共顶点, 由此易见结论成立。

(2) 由引理 1, $X \setminus \{x_0\} \subseteq A_P$, 于是, 路 $a_i p a_{i+1}$ 必为路 $u P x_1, x_1 p x_2, x_2 p x_3, \dots, x_{k-2} p x_{k-1}, x_{k-1} P v$ 之一的子路. 又注意到, $V(a_i p a_{i+1}) \setminus \{a_i, a_{i+1}\}$ 中的每个顶点必与 X 中至少一个顶点相邻. 下面分三种情形讨论。

情形 1 当 $a_i p a_{i+1}$ 是 $u P x_1$ 的子路时, 由引理 4, 5, 在路 $a_i p a_{i+1}$ 上除两端点外其余的顶点以如下次序排列着: $N(x_{k-1}), N(x_{k-2}), \dots, N(x_1), N(x_0)$, 其中可能有些是空集, 并且相邻两非空集间, 至多有一个公共顶点, 由此, 易见结论成立。

情形 2 当 $a_i p a_{i+1}$ 是 $x_j p x_{j+1}$ 的子路由引理 5, 6, 在路 $a_i p a_{i+1}$ 上除两端点外其余的顶点以如下次序排列着: $N(x_j), N(x_{j-1}), N(x_{j-2}), \dots, N(x_1), N(x_{k-1}), N(x_{k-2}), \dots, N(x_{j-1}), N(x_0)$, 其中可能有些是空集, 并且相邻两非空集间, 至多有一个公共顶点, 由此, 易见结论成立。

情形 3 当 $a_i p a_{i+1}$ 是 $x_{k-1} P v$ 的子路时, 由引理 5, 6 在路 $a_i p a_{i+1}$ 上除两端点外, 其余的顶点以如下次序排列着: $N(x_{k-1}), N(x_{k-2}), \dots, N(x_1), N(x_0)$, 其中可能有些是空集, 并且相邻两非空集间, 至多有一个公共顶点, 由此, 易见结论成立。

(3) 由引理 1, $x_{k-1} \in A_P$, 于是路 $a_m P v$ 必是路 $x_{k-1} P v$ 的子路, 又注意到, $V(a_m P v) \setminus \{a_m\}$ 中的每个顶点必与 X 中至少一个顶点相邻, 由此, 由引理 4, 5, 在路 $a_m P v$ 上除 a_m 外, 其余的顶点以如下次序排列着: $N(x_{k-1}), N(x_{k-2}), \dots, N(x_1), N(x_0)$, 其中可能有些是空集。

并且相邻两非空集间,至多有一个公共顶点,由此易见结论成立。

引理 7 $|B| \geq n - |A_R| - k|A_P| - (k-1)$

证:注意到, $D \cap V(upa_1), D \cap V(a_1pa_2), \dots, D \cap V(a_{k-2}pa_{k-1}), D \cap V(a_{k-1}Pv)$ 是两两不相交的,由此,再由引理 6,有 $|D_P| = |D \cap V(p)| = |D \cap V(upa_1)| + \sum_{i=1}^{m-1} |D \cap V(a_i pa_{i+1})| + |D \cap v(a_m \cap v)| \leq (m+1)(k-1) = (|A_P|+1)(k-1) = |A_P|(k-1) + (k-1)$
于是,有 $|B_P| = |V(P)| - |A_P| - |D_P| \geq |V(P)| - |A_P| - [|A_P|(k-1) + (k-1)] = |V(P)| - |A_P|k - (k-1)$ 。再由引理 2 有
 $|B_R| = |V(G)| - |V(P)| - |A_R| = n - |V(P)| - |A_R|$ 于是有
 $|B| = |B_P| + |B_R| \geq n - |A_R| - k|A_P| - (k-1)$

引理 8 $\sum_{i=0}^{k-1} |N(X \setminus \{x_i\})| \leq (k-1)n$

证:注意到,在 k 个集合 $N(X \setminus \{x_0\}), N(X \setminus \{x_1\}), \dots, N(X \setminus \{x_{k-1}\})$ 中, D 中的每个顶点都出现,而 B 中的每个顶点恰好出现于其中 $k-1$ 个集合中,于是,有 $\sum_{i=0}^{k-1} |N(X \setminus \{x_i\})| = k|D| + (k-1)|B| = k(|D| + |B| - |B|)$ 显然, $|D| + |B| = |V(G)| - |A| = n - |A_P| - |A_R|$ 。再由引理 7 有 $\sum_{i=0}^{k-1} |N(X \setminus \{x_i\})| \leq k(n - |A_P| - |A_R|) - [n - |A_P| - k|A_P| - (k-1)] = (k-1)n - (k-1)(|A_P| - 1)$ 由引理 2 $x_1 \in A_P$ 便有 $|A_P| \geq 1$ 又 $k \geq 2$ 于是,有 $\sum_{i=0}^{k-1} |N(X \setminus \{x_i\})| \leq (k-1)n$

引理 9 $\sum_{i=0}^{k-1} |N(X \setminus \{x_0\})| > (k-1)n$

证:由引理 2, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ 是 G 的 k -独立集,由定理的假设条件,便得结论。
注意到,引理 8, 9 的结论相互矛盾,使证明了定理 2。

2 定理的最好说明

设图 H_1 有 $k(\geq 2)$ 个分支,每个分支是完全图 $K_q(q \geq 1)$,即 $H_1 = kK_q$;而图 H_2 是由 k 个顶点所组成的没有边的图,即 $H_2 = \overline{K}_q$ 。并且 $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$ 。将 H_1 中的每个顶点与 H_2 中的每个顶点以边相连,如此所得的图设为 G ,即 $G = H_1 + H_2 = kK_q + \overline{K}_q$ 。

易见, $n = |V(G)| = k(q+1)$,且 G 是 k -连通图,在 H_2 中取二顶点 u, v ,不难看出不存在以 u, v , 为端点的 Hamilton 路。由此 G 不是 Hamilton-连通图。

在 H_1 的每个分支中各取得一个顶点,所组成的集合 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ 是 G 的 k -独立集,而 $S = X \setminus \{x_0\}$ 是 G 的 $(k-1)$ -独立集。不难算得

$$|N(S)| = (k-1)(q-1) + k = (k-1)(q+1) - (k-2) = \frac{(k-1)n}{k} - (k-2)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} |N(X \setminus \{x_i\})| = k[(k-1)(q-1) + k] = (k-1)n - k(k-2)$$

由此可见当 $k=2$ 时,定理 1, 2 的结论是最好的。而当 $k>2$ 时,定理 1, 2 的结论可能接近最好的。

参 考 文 献

- 1 Chvatal V, Erdős P. A note on Hamiltonian Circuits Discrete Math. 1972;2 111~113
- 2 Fraïssé P. A New Sufficient Condition for Hamiltonian Graphs. J Graph Theory 405~409
- 3 Bondy A. Integrality in Graph Theory. The Theory and Applications of Graphs (Fourth International Conference) John Wiley & Sons 117~125

A Sufficient Condition for Hamilton-connected Graphs

Cha Qibei Wu Zhengsheng
(Dept. of Fundamental Education)

Abstract In this paper, the following result is proved. Let G be a k -connected graph of order n without loops, $k \geq 2$, if $\sum_{i=0}^{k-1} |N(X - x_i)| > (k-1)n$

for any k -independent set, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$, then G is Hamilton-connected graph

Key words Hamilton-connected graph; k -connected graph; k -independent set