

室内二点透视倾斜镜面 映像的透视变换作图

冯 俊 镛

(工业设计系)

摘要 根据射影几何基本原理,提出了通过透视对应和变换,对于室内二点透视倾斜镜面映像的一种新的作图方法,颇具实际应用价值。

关键词 透视变换;透视对应中心;透视对应轴

0 前 言

入射光在平镜面上受到强烈的反射,致使在平面镜中能清楚而真实地显映出物体的虚像来。在室内设计中,由于此种镜面成像现象所产生的视觉上的扩大空间感和对于镜面前方造型物丰富的层次感,使得镜面的使用正愈来愈受到设计界的普遍关注。

迄今为止,在室内二点透视中求倾斜镜面虚像的传统的作图法,无不是先求出物体上各组棱线的虚像的灭点,由求作点和线的镜映进而绘制整个物体的镜像。这种作图法只是在物体外型呈立方体而且各物面又恰恰分别平行室内各界面的情况下才较为适用。当遇到求任意位置或复杂形状的物体的镜像时,就得一点一点地去求取,甚为不便。

本文介绍一种新的作图法,先求作镜面及其法线的辅灭点三角形,由绘出物体基透视的镜映图形进而求得物体的镜像。此法有如下一些特点:作图程序明确,方法程式化;能与室内透视图的作图过程有机衔接,可同步进行;尤其适合于作任意位置或形状复杂的物体镜像及镜像的相互镜映。

1 镜面映像形成的光学规律

由物理学中光的反射原理,可知过一空间点的入射光线和反射光线必交于反射面上一点,且两者与通过此点的镜面法线在同一平面内,两者分居于该法线两边,反射角与入射角相等,如图 1 所示。若 A 点位于某一入射线上,则该反射线必通过对于反射面同 A 点对称之

收稿日期:1992-12-07

A_1 点, AA_1 直线就是镜面的法线方向。应当指出, 这个规律与入射线所取的空间方位无关。

因此, 作一物体镜像的透视, 其实就是作对于镜面同物体表面的各点、线、面对称之各点、线、面(镜映)的透视。

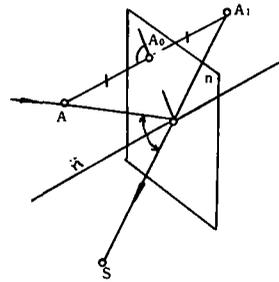


图1 镜面映像的光学规律

2 镜面映像透视变换作图的射影几何原理

2.1 辅灭点三角形 如图2所示, 在以视点为射影中心的中心投影中, 对于具视轴为水平位置的铅垂画面的室内二点透视

视, 其两个主灭点为 V_x, V_y , 对于画面和基面而言, 倾斜于墙面的镜面属于一般位置平面, 以镜面 π_0 上任一点为原点 O , 取镜面的法线方向

为 X_1 轴, 取由这一法线同另一与其相交的水平

线所决定的垂直于镜面的平面 Q 和镜面的交线为 Y_1 轴, 并取过这一法线所作的铅垂面 R 和镜面的交线为 Z_1 轴, X_1, Y_1, Z_1 三轴互相垂直。

在画面中各轴线的辅灭点分别为 V_{x1}, Y_{y1} 和 V_{z1} , 显然, 在辅灭点三角形中, V_{x1} 即是镜面的法线灭点, 而 V_{y1}, V_{z1} 即是镜面的灭线, 这灭点

三角形三条高的交点或三角形的垂心就是视心 V_c , 亦即视轴对于画面的垂足, 由此可得如下关系: $V_{x1}V_c$ 垂直于 $V_{y1}V_{z1}$

显然, 在辅灭点三角形中, V_{x1} 即是镜面的法线灭点, 而 V_{y1}, V_{z1} 即是镜面的灭线, 这灭点三角形三条高的交点或三角形的垂心就是视心 V_c , 亦即视轴对于画面的垂足, 由此可得如下关系: $V_{x1}V_c$ 垂直于 $V_{y1}V_{z1}$

2.2 中心投影的透视对应和变换

如图3所示, 一平面 π 与另一相交平面 π_1 对称于居中的对称平面 π_0 , 于是平面 π 内的

$\triangle ABC$ 与平面 π_1 内的 $\triangle A_1B_1C_1$ 的对应点的连线都必垂直于对称平面 π_0 , 亦即位于同一对称平面 π_0 的法线方向而相互平行。同时 $\triangle A_1B_1C_1$ 可看成系由原 $\triangle ABC$ 绕该两平面的交线 $h-h$ 旋转而得, 两个三角形的对应直线段都必相交于这条交线上, 而此交线又必位于对称平面 π_0 内。这就是说, 原来三角形及其对称图形确定了一个空间的平行透视对应^[1], 透视对应中心是无穷远点。

在画面内的中心投影中, 上述图形间的相互关系未变, 只是对于不平行于画面的一般位置对称平面即镜面来说, 所有垂直于它的直线即镜面法线方向的线已不再保持相互平行或交于无穷远点, 而是消失于同一点——镜面的法线灭点。这时, 按照平面的笛沙格定理^[2], 原平面图形 $\triangle ABC$ 及其映像 $\triangle A_1B_1C_1$ 仍确定了画面内的一个透视对应, 透视对应中心便是镜面的法线灭点, 透视对应轴即是平面图形和镜面交线的透视(图4)。

因为任何平面多边形都可看作是若干三角形在同一平面内的集合, 因而上述原理, 对于任何平面多边形与其映像的关系同样是适用的。

实际上, 在中心投影中任何平面多边形图形的镜面映像都可形象化地看作是

这样形成

实际上, 在中心投影中任何平面多边形图形的镜面映像都可形象化地看作是

这样形成

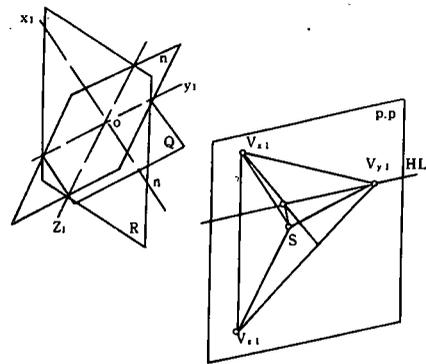


图2 镜面及其法线的辅灭点三角形

的:如图4所示,以原平面图形为棱柱体的底,以通过该图形各顶点而彼此透视平行并消失

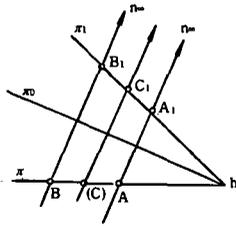


图3 图形与映像的平行透视对应

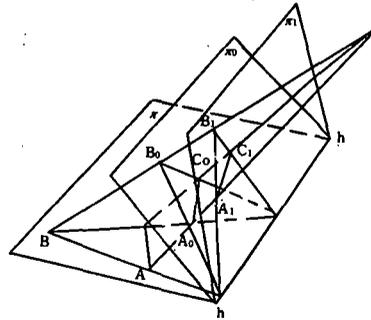


图4 图形与映像在画面内的透视对应

于同一法线灭点的诸素线为棱柱体的棱线,则以对于镜面与原平面对称之平面作为截平面,它对于该棱柱体所作的截交线的透视,就是原图形镜面映像的透视。

因此,用透视变换方法求任何平面图形的镜面映像主要可归结为下三点:(1)求出透视对应中心——镜面的法线灭点;(2)求出透视对应轴,即图形所在平面和镜面的交线;(3)求出一对对应点。

3 空间点镜像的透视变换作图

如图5所示,首先,含 A^pV_{x1} 作一铅垂的辅助平面。镜面与地面和交线为 O^pY^p ,辅助平面与地面的交线为 a^pV_x ,则 O^pY^p 与 a^pV_x 的交点 a^p 即为三面之共点。于是连接 a^pV_{z1} (当 V_{z1} 不可达时可过两平面迹线之交点),即是铅垂辅助平面与镜面交线的透视。 a^pV_{z1} 与 a^pV_x 的交点 a_0^p 即为过 a^p 之镜面法线与镜面的交点。然后,利用透视分割原理,以 a_0^p 为中点,在该法线上进行透视等分,使 $a^p a_0^p = a_0^p a_1^p$ 即可得 a_1^p 。以法线灭点 V_{x1} 为对应中心,以 $a_1^p V_{x1}$ 为对应轴,按透视对应将 $A^p a^p$ 变换为 $A_1^p a_1^p$, A^p 变换为 A_1^p 。

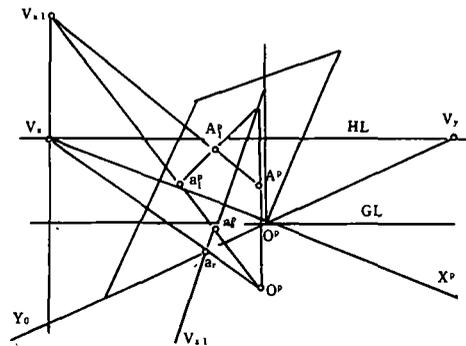


图5 空间点镜像作图

4 平面体镜像的透视变换作图

现以图6为例说明室内二点透视中求平面体在倾斜镜面中的镜像的主要步骤和方法。

(1)画出辅灭点三角形 以 V_x 为中心,以 S_0V_x 为半径(S_0 —重合视点)作圆弧到视平线上,得 M_x, M_x 实为将平行于铅垂平面 R 的视线平面绕该辅平面之灭线转入画面后的视点位置。由 M_x 按镜面法线对于铅垂线之实际倾角 70° 作直线,即可在该灭线线上相交得 V_{x1} 然后再作镜面灭线 $V_{y1}V_{z1}(V_{x1}V_{z1} \perp V_{y1}V_{z1})$ 。

铅垂线的交点 V_{x2} 即其灭点, V_{x2} 也就是物体上所有铅垂线段镜映的灭点。

(10) 过镜映基透视的各角点画出物体表面诸铅垂棱线的镜映方向, 与自物体顶面各角点所作的镜面法线相交, 即得顶面各角点的镜映, 然后顺次将它们以直线段相连, 即得柜台镜像的全部轮廓。

5.2 关于柜台在竖镜中的镜像作图

物体在竖镜中的镜像作图可视为斜镜作图的一种特例。此时镜面与地面的交线(墙脚线)就是基透视变换的透视轴, 而镜面灭线呈铅垂位置, 故镜面的法线灭点落在视平线上, 即 V_y 。此时物体上铅垂棱线的镜映仍保持铅垂方向, 而其余作图均同 5.1。

5.3 关于柜台镜像的相互镜映作图

当室内一角在一侧安有斜镜而在另一侧安有竖镜时, 则一镜中之镜像必在另一镜中按透视对应规律复现镜映, 以上的作图方法同样适用于求镜像的相互镜映。但应注意此时的透视轴应是前次变换即物体对镜像变换中的透视轴的镜映, 并且当两镜面互相垂直时, 其法线灭点保持不变。因此, 由斜镜中之镜像所产生的在竖镜中的镜映和由竖镜中之镜像所产生的在斜镜中的镜映恰相吻合。应当指出, 镜面的存在是形成物体镜像或镜映的客观条件, 所以物体的镜像必须限于镜面本身的范围以内而镜像的相互镜映也必须限于相应镜面本身之镜映的轮廓界限以内。

参考文献

1. 叶秉钧译. 建筑画法几何学. 高等教育出版社, 1989
2. 朱 辉等. 高等画法几何学. 上海科学技术出版社, 1985

The Drawing of perspective Transformation for Mirrorimage of Inclined Mirror plane of Interior Two-point perspective

Feng Junyong

(Dept. of Industrial Design)

Abstract According to projection geometry basal Principle, by means of perspective correspondence and transformation, the article puts forward a new method of drawing for mirrorimage of inclined mirror plane of interior two-point perspective. The method possesses rather practical application value.

Key-words perspective transformation; Centre of perspective correspondence; Axis of perspective correspondence