

光滑紧流形上的 Fréchet 数

费文滔

(基础课部)

摘要 在 Fréchet 曲线类所成的度量空间中含曲线 g 的连通分支 F_g 上给出了这样一个实值函数 $\alpha: F_g \rightarrow R^+$, 使得对任意 $\underline{h} \in F_g$, 只要其典则曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 上子曲线的 μ -参数变化量不超过 $\alpha(\underline{h})$, 则该子曲线的 J -直径不超过 m . 利用这个性质, 证明了光滑紧流形 M_n 上的 Fréchet 数 $R_i(M_n)$ 至多是可数无限的。

关键词 光滑紧流形; (J, g) -极值曲线; (J, g) -型数; 连通数; Fréchet 数

0 引言

在 Morse 理论的早期研究中, 光滑紧致流形 M_n 上的 Fréchet 数 $R_i(M_n)$ 曾是一个很重要的角色。众所周知, 光滑紧致二维流形 M_2 上的 Fréchet 数是有限的。M. Morse 还曾猜想, 高维流形 $M_n (n > 2)$ 上的 Fréchet 数也是有限的^[4], 然而, 曹和陆在三维流形上给出了 R_i 为无限的例子^[5]。

本文先是定义了所要的函数 $\alpha: F_g \rightarrow R^+$, 接着叙述了所谓的“ α 分割 $\underline{h}$ 的 μ -长度法”, 并证明了分割引理和重要的形变引理, 最后得出本文的结果: $m^g \geq R_i$. 这一结果在微分几何及微分方程上都具有一定的应用价值。

1 基本概念和结论

设 M_n 是光滑、紧致、连通的无边流形, 设 J 为 M_n 上正定的、非奇异的和 C^∞ 的 Weierstrass 积分(它可视为 Riemannian 长度的一个推广), 对 M_n 上任一恰当(proper)曲线 g , 记 $J(g)$ 为 g 的 J -长度。定义^[2]:

恰当曲线 h : 一条曲线定义为有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续映射 $h: [a, b] \rightarrow M_n; t \rightarrow h(t)$, 若 $h(t)$ 在 $[a, b]$ 的任一子区间上都不为常值, 则称这条曲线 h 是恰当曲线。

Fréchet 曲线类 $\underline{h}$: 设 $h: [a, b] \rightarrow M_n$ 以及 $k: [a, b] \rightarrow M_n$ 是恰当曲线, 若存在保持定向的 onto 同胚映射 $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$, 使得 $h = k \circ \varphi$ 或者等价地 $h \circ \varphi^{-1} = k$, 则称 h 和 k 是等价的,

收稿日期: 1992-04-01

记所有与 h 等价的恰当曲线组成的类为 $\underline{h}$, 则称 $\underline{h}$ 为所谓的 Fréchet 曲线类。

非退化 (ND) 点对 (A_1, A_2) : 设 γ 为连结点对 (A_1, A_2) 的极值曲线, 若在 γ 上 A_2 不为 A_1 的共轭点, 则称 γ 是非退化的, 于是, 若连结 A_1 到 A_2 的每条极值曲线都是非退化的, 则称点对 (A_1, A_2) 是非退化的。

设 $F_{A_1 A_2}^{\lambda}$ 为所有连结 ND 点对 (A_1, A_2) 的恰当曲线 h 所在的 Fréchet 曲线类 $\underline{h}$ 构成的度量空间。对任意恰当曲线 g , 设 F_g 为 $F_{A_1 A_2}^{\lambda}$ 的一个道路连通分支, 该分支包含 g 所在的 Fréchet 曲线类。

定义 $F_{A_1 A_2}^{\lambda}$ 的道路连通分支 K 的 i -连通数为 M_n 的 i -Fréchet 数。Landis 和 Morse^[3] 证明了 $F_{A_1 A_2}^{\lambda}$ 的各个道路连通分支相互间是同胚的, 不依赖于 M_n 在 $((M_n))$ 中的选取, 这里 $((M_n))$ 表示所有光滑同胚于 M_n 的流形类; 也不依赖于 (A_1, A_2) 在 M_n 中的选取。

固定 M_n 和 J , 设 g 为连结 ND 点对 (A_1, A_2) 的同伦极小化极值曲线, 再固定 g . 设 h 为连结点对 (A_1, A_2) 的一条极值曲线, 若 h 是 $A_1 A_2$ -同伦于 g 的, 则称该极值曲线 h 为 (J, g) -极值曲线。

设 γ 为连结 A_1 到 A_2 的一条极值曲线, 称在 γ 上 A_1 的位于 A_2 之前的共轭点的个数 (重合处以重数计算) 为 γ 的指数。

称指数为 i 的所有 (J, g) -极值曲线的个数为 (J, g) -型数, 记为 m_i^g 。

若对所有 $i \geq 0, m_i^g < +\infty$, 则称 M_n 是 (J, g) -有限的。

M. Morse 先是在 M_n 为 (J, g) -有限条件下证明了关系式^[2]

$$m_i^g \geq R_i(M_n) \quad (1)$$

进而, 他在没有假设 (J, g) -有限的条件下证明了这个关系式^[4], 但 Morse 约定, 当 m_i^g 为无限时, 关系式 (1) 表示 R_i 为有限或无限。

然而, 每个无限数都存在着势的概念, 所以一个明显的问题是: 当 R_i 为无限时, 其势会比 m_i^g 的势高吗?

回答是否定的, 这就是本文的一个主要的结论:

定理: R_i 至多是可数无限的!

这就使式 (1) 在一般的意义下成立。

2 函数 α 的构造及其基本性质

在定义函数 α 之前, 先叙述两个基本的结果和定义。

引理 1 给定流形 M_n 和其上的 Weierstrass 积分 J , 必存在正数 $\underline{m}$ (称为特定 J -长度), 满足如下性质: 从任意给定的 p 点出发的, 具有 J -长度 $\underline{m}$ 的所有极值曲线上没有 p 的共轭点, 也没有异于 p 的交点; 这些极值曲线复盖 M_n 上的一个闭的 n 维圆盘, 点 p 为该圆盘的点, 并且由 J -长度给出连结极值曲线端点的逐段正则曲线的绝对极小值。

定义 1 若一条极值曲线 g 满足 $J(g) \leq \underline{m}$, 则称 g 为基本极值曲线。

引理 2 设 Ω 为 $M_n \times M_n$ 的一个子空间, 对于任意 $p, q \in \Omega$, 有 $0 < d(p, q) \leq \underline{m}$ 。
(这里 $d(p, q)$ 表示 p 到 q 的 J -距离)。则映射

$$(t, p, q) \rightarrow Q(t, p, q): [0, \underline{m}] \times \Omega \rightarrow M_n$$

是连续的。

引理3 对于任意 $\underline{h} \in F_g$, 典则曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 可用连续映射来定义:

$$\mu \rightarrow A(\mu, \underline{h}) : [0, ((\underline{h}))] \rightarrow M_n$$

满足下述两个性质:

(1) 参数 μ (称为沿 $A(\cdot, \underline{h})$ 的 μ -长度) 的终值 $((\underline{h}))$ 关于 $\underline{h} \in F_g$ 是连续的。

(2) 映射

$$(\mu, \underline{h}) \rightarrow A(\mu, \underline{h}) : X \rightarrow M_n$$

是连续映射。这里 $X = \{(\mu, \underline{h}) \in R \times F_g : 0 \leq \mu \leq ((\underline{h}))\}$

(以上结论均可在[1]中找到)

下面着手定义 F_g 上的连续函数 α 。

对任意 $\underline{h} \in F_g$, 记 $R(\underline{h})$ 为 $|\underline{h}|$ 的 Riemannian 直径, 则有 $J(g) \leq ((\underline{h})) \leq R(\underline{h})^{[2]}$ 。于是定义函数 $f: F_g \rightarrow R^+$ 为

$$f(\underline{h}) = m / ((\underline{h}))$$

因为 $((\underline{h}))$ 关于 $\underline{h} \in F_g$ 是连续的, 故 f 也是 F_g 上的连续函数。

以下为简便计, 用 $\underline{h}(\mu)$ 表示点 $A(\mu, \underline{h})$ 。

定义函数 $H: R \times F_g \rightarrow R$ 为:

$$H(\alpha, \underline{h}) = (\alpha - ((\underline{h})))f(\underline{h}) + \max_{\substack{|\mu - \mu'| \leq \alpha \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu'))$$

$$|\mu - \mu'| \leq \alpha$$

$$\mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]$$

其中 $\alpha \in [0, ((\underline{h}))]$

容易验证, $H(\alpha, \underline{h})$ 为关于 α 的连续函数, 并且关于 α 是严格增函数, 又因为

当 $\alpha = 0$ 时, $H(0, \underline{h}) = -m < 0$

当 $\alpha = ((\underline{h}))$ 时, $H((\underline{h}), \underline{h}) = \max_{\substack{|\mu - \mu'| \leq \alpha \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) = d(\underline{h}) > 0$

$$|\mu - \mu'| \leq \alpha$$

$$\mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]$$

所以, 存在唯一的 $\alpha(\underline{h})$, 使得 $H(\alpha(\underline{h}), \underline{h}) = 0$, 于是, 定义 F_g 上的函数 α 为:

$\alpha: F_g \rightarrow R^+ : \underline{h} \rightarrow \alpha(\underline{h})$. 满足 $H(\alpha(\underline{h}), \underline{h}) = 0$ 。

引理4 α 为 F_g 上的连续函数。

证明: 按照 α 的定义, 有

$$H(\alpha(\underline{h}), \underline{h}) = H(\alpha(\underline{k}), \underline{k}) = 0, \quad \forall \quad \underline{h}, \underline{k} \in F_g$$

即:

$$\frac{m}{((\underline{h}))} \alpha(\underline{h}) - m + \max_{\substack{|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu'))$$

$$|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h})$$

$$\mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]$$

$$= \frac{m}{((\underline{k}))} \alpha(\underline{k}) - m + \max_{\substack{|\nu - \nu'| \leq \alpha(\underline{k}) \\ \nu, \nu' \in [0, ((\underline{k}))]}} d(\underline{k}(\nu), \underline{k}(\nu'))$$

$$|\nu - \nu'| \leq \alpha(\underline{k})$$

$$\nu, \nu' \in [0, ((\underline{k}))]$$

也就是:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{((\underline{h}))} \alpha(\underline{h}) - \frac{m}{((\underline{k}))} \alpha(\underline{k}) \\ &= \max_{\substack{|\nu - \nu'| \leq \alpha(\underline{k}) \\ \nu, \nu' \in [0, ((\underline{k}))]}} d(\underline{k}(\nu), \underline{k}(\nu')) - \max_{\substack{|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) \end{aligned} \quad (2)$$

假设 α 在 F_g 上不连续, 则存在 $\underline{h} \in F_g$, 存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\delta_n > 0, \delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$) 都存在 $\underline{k}_n \in F_g, \underline{k}_n \underline{h} < \delta_n$, 满足 $|\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n)| \geq \epsilon_0$.

显然, 上述序列 $\{\underline{k}_n\}$ 可以分成两个子序列 $\{\underline{k}_{ni}\}$ 和 $\{\underline{k}_{nj}\}$, $\{\underline{k}_{ni}\}$ 是指满足 $\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_{ni}) \leq -\epsilon_0$ 的那些曲线类, $\{\underline{k}_{nj}\}$ 是指满足 $\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_{nj}) \geq \epsilon_0$ 的那些曲线类. 其中至少有一个子序列是无限的. 若 $\{\underline{k}_{ni}\}$ 是无限的, 则不妨用 $\{\underline{k}_{ni}\}$ 来替代 $\{\underline{k}_n\}$, 即: 存在 $\underline{h} \in F_g$, 存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意 $\delta_n > 0, \delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow +\infty$), 都存在 $\underline{k}_n \in F_g, \underline{k}_n \underline{h} < \delta_n$, 使得 $\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n) \leq -\epsilon_0$; 若 $\{\underline{k}_{nj}\}$ 是无限的, 则也可以用 $\{\underline{k}_{nj}\}$ 来替代 $\{\underline{k}_n\}$, 使得 $\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n) \geq \epsilon_0$. 于是, 只要对上述两种情况分别加以讨论, 即:

情形一: $\exists \underline{h} \in F_g, \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta_n > 0, \delta_n \rightarrow 0,$
 $\exists \underline{k} \in F_g, \underline{k}_n \underline{h} < \delta_n, \in \alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n) \leq -\epsilon_0.$

情形二: $\exists \underline{h} \in F_g, \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta_n > 0, \delta_n \rightarrow 0,$
 $\exists \underline{k} \in F_g, \underline{k}_n \underline{h} < \delta_n, \in \alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n) \geq \epsilon_0.$

在第一种情形, 由于 $\underline{h} \underline{k}_n < \delta_n$, 故有 $|((\underline{k}_n)) - ((\underline{h}))| < 2\delta_n^{[2]}$, 设 $((\underline{k}_n)) = ((\underline{h})) + 2\tau_n \delta_n$, 其中 $|\tau_n| < 1$, 于是, 一方面有:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{((\underline{h}))} \alpha(\underline{h}) - \frac{m}{((\underline{k}_n))} \alpha(\underline{k}_n) \\ &= \frac{m}{((\underline{h}))} \alpha(\underline{h}) - \frac{m}{((\underline{h})) + 2\tau_n \delta_n} \alpha(\underline{k}_n) \\ &= \frac{m}{((\underline{h})) + 2\tau_n \delta_n} (\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n)) + \frac{2\tau_n \delta_n \alpha(\underline{h}) m}{((\underline{h}))^2 + 2\tau_n \delta_n ((\underline{h}))} \end{aligned}$$

因为 $\delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$), $|\tau_n| < 1$ 有界, $\alpha(\underline{h}), m, ((\underline{h}))$ 都是确定的数, 所以

$$\frac{2\tau_n \delta_n \alpha(\underline{h}) m}{((\underline{h}))^2 + 2\tau_n \delta_n ((\underline{h}))} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow +\infty)$$

当 $\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n) \leq -\epsilon_0, m > 0, ((\underline{h})) + 2\tau_n \delta_n > 0$, 故存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$\frac{m}{((\underline{h}))} \alpha(\underline{h}) - \frac{m}{((\underline{k}_n))} \alpha(\underline{k}_n) < -\frac{m \epsilon_0}{2((\underline{h}))}$$

另一方面, 考虑

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{|\nu - \nu'| \leq \alpha(\underline{k}_n) \\ \nu, \nu' \in [0, ((\underline{k}_n))]}} d(\underline{k}_n(\nu), \underline{k}_n(\nu')) - \max_{\substack{|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) \end{aligned}$$

因为这里 $\underline{h}$ 固定, 所以 $\alpha(\underline{h})$ 也是确定数, 由于 $[0, ((\underline{h}))]$ 为有界闭区间, 故 $\max_{\substack{|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu'))$ 是能够达到的, 假设在 μ -参数为 μ 和 μ' 的两点 $A(\mu, \underline{h})$ 和 $A(\mu', \underline{h})$

处达到极大值, 即

$$\begin{aligned} \max_{\substack{|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) &= d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) \\ &|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ &\mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))] \end{aligned}$$

假定 $\mu < \mu'$.

Claim 1. 由于 $\mu < \mu'$, 故可以取 $0 < \sigma < \frac{1}{8}|\mu - \mu'|$ 使得当 $|\mu - v| < \sigma, |\mu' - v'| < \sigma$ 时, 有 $v < v'$.

Claim 2. 对于任意 σ , 可以取 $0 < \sigma' < \frac{1}{8}\sigma$. 使得当 $\underline{k}\underline{h} < \sigma'$ 时, $\{v | v \in [0, ((\underline{k}))], |\mu - v| < \sigma\} \neq \emptyset$ 其中 $\mu \in [0, ((\underline{h}))]$. 否则, 若上述集合为空集, 则对任意 $v \in [0, ((\underline{k}))]$, 有 $|\mu - v| \geq \sigma$. 显然, 若 $\mu \in [0, ((\underline{h}))] \subseteq [0, ((\underline{k}))]$, 则只要取 $v = \mu$ 即导出矛盾; 若 $[0, ((\underline{k}))] \subset [0, ((\underline{h}))]$, 则对于 $\mu \in [0, ((\underline{k}))]$, 仍可取 $v = \mu$ 导出矛盾; 对于 $\mu \in [((\underline{k})), ((\underline{h}))]$, 取 $v = ((\underline{k}))$, 有 $|((\underline{k})) - \mu| = \mu - ((\underline{k})) < ((\underline{h})) - ((\underline{k}))$ 故 $((\underline{h})) - ((\underline{k})) > \sigma > 8\sigma'$, 而又因为 $\underline{k}\underline{h} < \sigma'$, 故 $|((\underline{h})) - ((\underline{k}))| < 2\sigma'$, 从而导出矛盾. 故 Claim 2 成立.

由引理 3. 映射

$$X \rightarrow M_n : (\mu, \underline{h}) \rightarrow A(\mu, \underline{h})$$

为连续映射, 其中 $X = \{(\mu, \underline{h}) \in R \times F_g | 0 \leq \mu \leq ((\underline{h}))\}$ 可知, 对任意 $\tilde{\sigma} > 0$, 存在满足 Claim 1 和 Claim 2 的 $\sigma > 0, \sigma' > 0$, 使得对于 $\underline{k} \in F_g, v, v' \in [0, ((\underline{k}))]$, 只要 $|\mu - v| < \sigma, |\mu' - v'| < \sigma, \underline{k}\underline{h} < \sigma'$, 就有

$$d(\underline{h}(\mu), \underline{k}(v)) < \tilde{\sigma}$$

$$d(\underline{h}(\mu'), \underline{k}(v')) < \tilde{\sigma}$$

从而有:

$$\begin{aligned} d(\underline{k}(v), \underline{k}(v')) - d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) &\geq -d(\underline{k}(v), \underline{h}(\mu)) - d(\underline{k}(v'), \underline{h}(\mu')) \\ &> -2\tilde{\sigma} \end{aligned}$$

因为 $\delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$), 故存在 N_2 , 使得当 $n > N_2$ 时, $\delta_n < \sigma'$.

根据上述估计, 对任意 $\tilde{\sigma} > 0, \tilde{\sigma} < \frac{m\epsilon_0}{8((\underline{h}))}$, 存在 $N_3 > 0$, 存在 $\sigma < \epsilon_0/4$, 存在 $v_n, v'_n \in [0, ((\underline{k}_n))]$, 满足 $|v_n - \mu| < \sigma, |v'_n - \mu'| < \sigma, \underline{k}_n \underline{h}_n < \delta_n < \sigma'$, 使得 $d(\underline{k}_n(v_n), \underline{k}_n(v'_n)) - d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) > -2\sigma'$. 显然, 由于 $\sigma' < \epsilon_0/4$, 得到

$$\begin{aligned} |v_n - v'_n| &= |v_n - \mu + \mu - \mu' + \mu' - v'_n| \\ &\leq |\mu - v_n| + |\mu' - v'_n| + |\mu - \mu'| \\ &< \sigma + \sigma + |\mu - \mu'| \\ &< \frac{\epsilon_0}{2} + \alpha(\underline{h}) \\ &< \alpha(\underline{k}_n) \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}
& \max_{\substack{|v-v'| \leq \alpha(\underline{k}_n) \\ v, v' \in [0, ((\underline{k}_n))]}} d(\underline{k}_n(v), \underline{k}_n(v')) - \max_{\substack{|\mu-\mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) \\
& \geq d(\underline{k}_n(v_n), \underline{k}_n(v_n')) - d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) \\
& \geq -2\tilde{\sigma} > -\frac{m\varepsilon_0}{4((\underline{h}))}.
\end{aligned}$$

于是等式(2)不成立。矛盾!

在第二种情形,若假设 $\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k}_n) \geq \varepsilon_0$, 则一方面,有

$$\frac{m}{((\underline{h}))} \alpha(\underline{h}) - \frac{m}{((\underline{k}_n))} \alpha(\underline{k}_n) > \frac{m\varepsilon_0}{2((\underline{h}))} \quad (\text{当 } n > N_1)$$

另一方面,对于每个 $\underline{k}_n$, 存在 $v_n, v_n' \in [0, ((\underline{k}_n))]$, 使得:

$$\begin{aligned}
& \max_{\substack{|v-v'| \leq \alpha(\underline{k}_n) \\ v, v' \in [0, ((\underline{k}_n))]}} d(\underline{k}_n(v), \underline{k}_n(v')) = d(\underline{k}_n(v_n), \underline{k}_n(v_n')) \\
& \leq d(\underline{k}_n(v_n), \underline{h}(\mu_n)) + d(\underline{h}(\mu_n), \underline{h}(\mu_n')) \\
& \leq 2\tilde{\sigma} \quad (\text{当 } n > N_2) \\
& < \frac{m\varepsilon_0}{2((\underline{h}))} \quad (\text{当 } n > N_3)
\end{aligned}$$

然后,按前述如法炮制,在 v_n 附近找到 μ_n , 在 v_n' 附近找到 μ_n' , 使得

$$\begin{aligned}
& \max_{\substack{|v-v'| \leq \alpha(\underline{k}_n) \\ v, v' \in [0, ((\underline{k}_n))]}} d(\underline{k}_n(v), \underline{k}_n(v')) - \max_{\substack{|\mu-\mu'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ \mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(\mu), \underline{h}(\mu')) \\
& \leq d(\underline{k}_n(v_n), \underline{k}_n(v_n')) - d(\underline{h}(\mu_n), \underline{h}(\mu_n')) \\
& \leq d(\underline{k}_n(v_n), \underline{h}(\mu_n)) + d(\underline{k}_n(v_n'), \underline{h}(\mu_n')) \\
& < 2\tilde{\sigma} \quad (\text{当 } n > N_2) \\
& < \frac{m\varepsilon_0}{2((\underline{h}))} \quad (\text{当 } n > N_3)
\end{aligned}$$

于是等式(2)仍不成立,矛盾!

至此,引理得证。

引理 5 若 $\mu, \mu' \in [0, ((\underline{h}))]$, $|\mu - \mu'| \leq \alpha(\underline{h})$

则 $d(A(\cdot, \underline{h})|[\mu, \mu']) \leq m$

证明:由 $H(\alpha(\underline{h}), \underline{h}) = 0$, 得

$$\begin{aligned}
& \max_{\substack{|v-v'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ v, v' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(v), \underline{h}(v')) = ((\underline{h})) - \alpha(\underline{h}) f(\underline{h}) = m - \alpha(\underline{h}) \frac{m}{((\underline{h}))} \leq m
\end{aligned}$$

又显然有:

$$\begin{aligned}
d(A(\cdot, \underline{h})|[\mu, \mu']) & \leq \max_{\substack{|v-v'| \leq \alpha(\underline{h}) \\ v, v' \in [0, ((\underline{h}))]}} d(\underline{h}(v), \underline{h}(v')) < m
\end{aligned}$$

从而引理得证。

上述引理说明,在典则曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 上的每一条子曲线,只要其 μ -参数的变化量不超过

$\alpha(\underline{h})$, 则该子曲线的 J -直径就不超过特定 J -长度 $\underline{m}$. 于是, 对于这样的子曲线, 其两个端点可用基本极值曲线来连结。

3 定理的证明

为此, 我们先作一些准备工作。

对于任意 $\underline{h} \in F_g$, 记 $n(\underline{h}) = \left\lfloor \frac{((\underline{h}))}{\alpha(\underline{h})} \right\rfloor$, 我们可以把典则曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 分成 $n(\underline{h}) + 1$ 条相

继的子曲线: $\gamma_1(\underline{h}), \gamma_2(\underline{h}), \dots, \gamma_{n(\underline{h})}(\underline{h}), \gamma_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$ 其中, 前面 $n(\underline{h})$ 条子曲线的 μ -参数的增量都为 $\alpha(\underline{h})$, 最后一条子曲线 $\gamma_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$ 的 μ -参数增量等于 $((\underline{h})) - n(\underline{h})\alpha(\underline{h}) < \alpha(\underline{h})$. 若 $((\underline{h}))$ 恰好等于 $n(\underline{h})\alpha(\underline{h})$, 则 $\gamma_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$ 就恰好只是一个点 A_2 了。

我们不妨把上述利用 $\alpha(\underline{h})$ 来把典则曲线分成相继子曲线的方法叫做“ α 分割 $\underline{h}$ 的 μ -长度法”。

引理 6 (分割引理) 对任意给定的 $\underline{h} \in F_g$

(I) 若 $((\underline{h})) \neq n(\underline{h})\alpha(\underline{h})$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $\underline{k} \in F_g, \underline{k} \underline{h} < \delta$, 有 $n(\underline{h}) = n(\underline{k})$

(II) 若 $((\underline{h})) = n(\underline{h})\alpha(\underline{h})$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $\underline{k} \in F_g, \underline{k} \underline{h} < \delta$, 有 $n(\underline{h}) - n(\underline{k}) = 0$ 或者 1.

证明: 在假设 (I) 的情形下, 令

$$\delta(\underline{h}) \triangleq ((\underline{h})) - n(\underline{h})\alpha(\underline{h})$$

$$\tilde{\delta}(\underline{h}) \triangleq \alpha(\underline{h}) - \delta(\underline{h})$$

则显然有 $0 < \delta(\underline{h}) < \alpha(\underline{h}), 0 < \tilde{\delta}(\underline{h}) < \alpha(\underline{h})$, 因为 $\alpha(\underline{h})$ 关于 $\underline{h}$ 是连续的, 所以对于

$\min\left\{\frac{\delta(\underline{h})}{8}, \frac{\tilde{\delta}(\underline{h})}{8}\right\}$, 存在 $\delta > 0, \delta < \min\left\{\frac{\delta(\underline{h})}{8}, \frac{\tilde{\delta}(\underline{h})}{8}\right\}$, 使得当 $\underline{k} \in F_g, \underline{k} \underline{h} < \delta$ 时, 有

$|\alpha(\underline{k}) - \alpha(\underline{h})| < \frac{\min\{\delta(\underline{h}), \tilde{\delta}(\underline{h})\}}{4(n(\underline{h}) + 1)}$, 又由 $\underline{k} \underline{h} < \delta$, 可知 $|((\underline{k})) - ((\underline{h}))| < 2\delta$, 此时

$$\begin{aligned} & ((\underline{k})) - n(\underline{h})\alpha(\underline{k}) \\ &= ((\underline{k})) - ((\underline{h})) + ((\underline{h})) - n(\underline{h})\alpha(\underline{h}) + n(\underline{h})(\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\ &= ((\underline{k})) - ((\underline{h})) + \delta(\underline{h}) + n(\underline{h})(\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\ &\geq \delta(\underline{h}) - |((\underline{k})) - ((\underline{h}))| - n(\underline{h})|\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})| \\ &\geq \delta(\underline{h}) - 2\delta - n(\underline{h}) \frac{\min\{\delta(\underline{h}), \tilde{\delta}(\underline{h})\}}{4(n(\underline{h}) + 1)} \\ &\geq \delta(\underline{h}) - \min\left\{\frac{\delta(\underline{h})}{4}, \frac{\tilde{\delta}(\underline{h})}{4}\right\} - \frac{1}{4}\min\{\delta(\underline{h}), \tilde{\delta}(\underline{h})\} \\ &\geq \delta(\underline{h}) - \frac{1}{2}\delta(\underline{h}) \\ &= \frac{1}{2}\delta(\underline{h}) > 0 \end{aligned}$$

同样,

$$((\underline{k})) - n(\underline{h})\alpha(\underline{k})$$

$$\begin{aligned}
&= ((\underline{k}) - (\underline{h})) + ((\underline{h}) - n(\underline{h})\alpha(\underline{h})) + (n(\underline{h}) + 1)(\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\
&\quad - (\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\
&\leq |(\underline{k}) - (\underline{h})| + |(\underline{h}) - n(\underline{h})\alpha(\underline{h})| + (n(\underline{h}) + 1)|\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})| \\
&\quad - (\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\
&\leq 2\delta + \delta(\underline{h}) + \frac{1}{4}\min\{\delta(\underline{h}), \tilde{\delta}(\underline{h})\} - (\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\
&\leq \delta(\underline{h}) + \frac{1}{2}\min\{\delta(\underline{h}), \tilde{\delta}(\underline{h})\} - (\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\
&\leq \delta(\underline{h}) + \frac{1}{2}\tilde{\delta}(\underline{h}) - (\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\
&= (\delta(\underline{h}) + \tilde{\delta}(\underline{h})) - \frac{1}{2}\tilde{\delta}(\underline{h}) - (\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})) \\
&= \alpha(\underline{k}) - \frac{1}{2}\tilde{\delta}(\underline{h}) < \alpha(\underline{k})
\end{aligned}$$

从而,只要 $\underline{h} \underline{k} < \delta$, 就有 $n(\underline{h}) = n(\underline{k})$.

在假设(II)的情形下,由于 $\alpha(\underline{h})$ 关于 $\underline{h}$ 连续,故对于 $\alpha(\underline{h})/4n(\underline{h})$, 存在 $\delta > 0, \delta < \alpha(\underline{h})/8$, 使得当 $\underline{k} \in F_g, \underline{k} \underline{h} < \delta$ 时,有 $|\alpha(\underline{k}) - \alpha(\underline{h})| < \alpha(\underline{h})/4(n(\underline{h}) + 1)$ 此时,有

$$\begin{aligned}
|((\underline{k}) - n(\underline{h})\alpha(\underline{k}))| &\leq |((\underline{k}) - (\underline{h}))| + n(\underline{h})|\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{k})| \\
&< \frac{\alpha(\underline{h})}{4} + \frac{\alpha(\underline{h})}{4} = \frac{1}{2}\alpha(\underline{h}) \\
&< \alpha(\underline{h})
\end{aligned}$$

于是从上式估计可知:

若 $((\underline{k})) \geq n(\underline{h})\alpha(\underline{k})$, 则 $n(\underline{k}) = n(\underline{h})$

若 $((\underline{k})) < n(\underline{h})\alpha(\underline{k})$, 则 $n(\underline{k}) = n(\underline{h}) - 1$

至此,引理成立.

注:(1) 当 $n(\underline{k}) = n(\underline{h})$ 时,则按照我们的“ α 分割 $\underline{h}$ 的 μ -长度法”,可以把典则曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 和典则曲线 $A(\cdot, \underline{k})$ 分割成相等份数的子曲线.

(2) 当 $n(\underline{k}) = n(\underline{h}) - 1$ 时,按“ α 分割 $\underline{h}$ 的 μ -长度法”,虽然把 $A(\cdot, \underline{h})$ 分割成 $n(\underline{h}) + 1$ 条子曲线,但最后一条子曲线 $\gamma_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$ 却已退化为一个点,故实际上仍为 $n(\underline{h})$ 条子曲线,与此时 $A(\cdot, \underline{k})$ 被分割成 $n(\underline{k}) + 1$ 条子曲线数目相等

我们利用“ α 分割 $\underline{h}$ 的 μ -长度法”,可以把典则曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 分成 $n(\underline{h}) + 1$ 条子曲线,由上节的引理 5 可知,每条子曲线的 J -直径 $\leq m$.

记分成的 $n(\underline{h}) + 1$ 条子曲线 $\{\gamma_i(\underline{h}) | i = 1, \dots, n(\underline{h}) + 1\}$ 的各自的末端点为

$$z_1(\underline{h}), z_2(\underline{h}), \dots, z_{n(\underline{h})}(\underline{h}), z_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$$

显然 $z_{n(\underline{h})+1}(\underline{h}) = A_2$, 记 $\gamma_1(\underline{h})$ 的起始点为 $z_0(\underline{h})$, 则显然有 $z_0(\underline{h}) = A_1$, 于是每两点 z_{i-1}, z_i 之间可用基本极值曲线相联结. 若 $\gamma_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$ 已退化为一点 A_2 , 此时 $z_{n(\underline{h})}(\underline{h}) = A_2$, $z_{n(\underline{h})+1}(\underline{h}) = A_2$, 则我们约定联结 $z_{n(\underline{h})}(\underline{h})$ 和 $z_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$ 的基本极值曲线就只有一点 A_2 , 这样把相邻两点都用基本极值曲线联结,就得到一条折极值曲线 $\zeta^{n(\underline{h})}(\underline{h})$, 记该折极值曲线所在的 Fréchet 曲线类为 $\zeta^{n(\underline{h})}(\underline{h})$; 当 $\underline{h}$ 取遍 F_g 时,记上述得到的所有这种折极值曲线类 $\zeta^{n(\underline{h})}(\underline{h})$ 构成 ζF_g , 即

$$\zeta F_g = \{\zeta^{n(h)}(\underline{h}) | \underline{h} \in F_g\}$$

显然, 每条折极值曲线 $\zeta^{n(h)}(\underline{h})$ 在 ζF_g 中是 $A_1 A_2$ - 同伦于 g 的^[1]. 故 $\zeta F_g \subset F_g$.

引理 7 (形变引理) 存在 F_g 上的形变 $D: F_g \times I \rightarrow F_g$, 满足: $D(\underline{h}, 0) = \underline{h}$

$$D(\underline{h}, 1) = \zeta^{n(h)}(\underline{h})$$

证明: 对于任意 $\underline{h} \in F_g$, 其典则曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 可用 μ -长度来参数化, 记前述在 $A(\cdot, \underline{h})$ 上的相继点 $\{z_i(\underline{h}) | i = 0, 1, \dots, n(\underline{h}) + 1\}$ 相对应的 μ -参数值分别为 $\mu_0(\underline{h}), \mu_1(\underline{h}), \dots, \mu_{n(\underline{h})}(\underline{h}), \mu_{n(\underline{h})+1}(\underline{h})$, 显然,

$$\mu_i(\underline{h}) = i a(\underline{h}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n(\underline{h})$$

$$\mu_{n(\underline{h})+1} = ((\underline{h}))$$

对于 $\gamma_i(\underline{h})$ 上的点 P , 其 μ -参数可表为:

$$(1-t)\mu_{i-1}(\underline{h}) + t\mu_i(\underline{h}) \quad i = 1, \dots, n(\underline{h}) + 1$$

于是, 我们对 $0 < t < 1$, 引进记号 $\mu'_i(\underline{h})$:

$$\mu'_i(\underline{h}) \triangleq (1-t)\mu_{i-1}(\underline{h}) + t\mu_i(\underline{h}) \quad i = 1, \dots, n(\underline{h}) + 1$$

显然有:

$$\mu'_i(\underline{h}) = \mu_{i-1}(\underline{h}) + t a(\underline{h}) \quad i = 1, \dots, n(\underline{h})$$

$$\mu'_{n(\underline{h})+1}(\underline{h}) = \mu_n(\underline{h}) + t((\underline{h})) - \mu_n(\underline{h})$$

可能会出现这样的情形, 对于某个 t ($0 < t < 1$), 点 P 与 $\gamma_i(\underline{h})$ 的起始点重合, 这时我们称 $\mu'_i(\underline{h})$ 是“例外”的。

下面定义形变 $D: F_g \times I \rightarrow F_g$

当 $t = 0$ 时, 定义 $D(\underline{h}, 0) \equiv \underline{h} \quad (\forall \underline{h} \in F_g)$

当 $t = 1$ 时, 定义 $D(\underline{h}, 1) = \zeta^{n(h)}(\underline{h}) \quad (\forall \underline{h} \in F_g)$

当 $0 < t < 1$ 时, 如下定义 $D(\underline{h}, t)$: 先固定 $\underline{h}$ 和 t , 我们将先定义连结 A_1 到 A_2 的一条曲线 $k'(\underline{h})$, 记该曲线所在的 Fréchet 曲线类为 $k'(\underline{h})$, 于是就令 $D(\underline{h}, t) \triangleq k'(\underline{h})$. 定义 $k'(\underline{h})$ 的承载为有限多条相继的曲线, 其中每条曲线都有各自的参数, 但它们的并作为整条曲线仍可以参数化. 对整条曲线的参数化可依据下述约定:

设 k_1, k_2 为两条相继的曲线, k_1 的末端点即为 k_2 的起始点, 那么沿 k_1, k_2 的轨迹得到的一条曲线 λ 可以如下参数化: λ 上沿 k_1 的轨迹得到的一条子曲线沿用 k_1 的参数, 设 P 为 λ 上沿 k_2 的轨迹得到的一条子曲线上的一点, 指定其参数值为 $\tau + C$, 其中 τ 为 P 点作为 k_2 上的点时按 k_2 的参数化所具有的参数值, 而 C 为一个常数, C 的取值使得 λ 的参数在 k_1, k_2 的交接点处连续. 以上这种参数化约定的合理性可参见[1].

根据上述约定, 在 $0 < t < 1$ 时, 对于 $\gamma_i(\underline{h})$, 把 $\gamma_i(\underline{h})$ 的起点和 $\gamma_i(\underline{h})$ 上具有参数值 $\mu'_i(\underline{h})$ 的点用基本极值曲线 $E'_i(\underline{h})$ 连结起来, 而 $\gamma_i(\underline{h})$ 上后面余下的一段子曲线 $R'_i(\underline{h})$ (即 P 点与 $z_i(\underline{h})$ 点之间的部分) 保持不变, 记 $E'_i(\underline{h})$ 和 $R'_i(\underline{h})$ 相连结而得到的曲线为 $\gamma'_i(\underline{h})$, 当 $\mu'_i(\underline{h})$ 为前述的“例外”时就单独用 $R'_i(\underline{h})$ 表示 $\gamma'_i(\underline{h})$. 假设每条基本极值曲线已经用从其起始点出发进行度量的 J -长度来预先参数化, 而 $A(\cdot, \underline{h})$ 的每条子曲线也已经用 μ -长度来参数化, 其上的每个点的参数值就等于它在曲线 $A(\cdot, \underline{h})$ 上的参数值。

因此, 对于 $t \in (0, 1)$, 记 $k'(\underline{h})$ 即为连结上述 $n(\underline{h}) + 1$ 条相继的曲线 $\gamma'_i(\underline{h})$ 所组成的曲

线, $k'(\underline{h})$ 的参数化采用上述参数化约定方法, 于是, 定义:

$$D(\underline{h}, t) \triangleq \underline{k}'(\underline{h}) \quad \forall \quad \underline{h} \in F_g, \quad \forall \quad t \in (0, 1)$$

容易看出, 这种定义和前面定义的 $D(\underline{h}, 0)$ 和 $D(\underline{h}, 1)$ 是相融合的。

于是若记

$$\begin{aligned} k^1(\underline{h}) &= \zeta^{n(\underline{h})}(\underline{h}) & \forall \quad \underline{h} \in F_g \\ k^0(\underline{h}) &= A(\cdot, \underline{h}) & \forall \quad \underline{h} \in F_g \end{aligned}$$

则得到

$$D(\underline{h}, t) = \underline{k}'(\underline{h}) \quad \forall \quad (t, \underline{h}) \in [0, 1] \times F_g$$

剩下的问题便是证明 $D(\underline{h}, t)$ 的连续性。

考虑到 $k^0(\underline{h}^0)k'(\underline{h}) \leq k^0(\underline{h}^0)k'(\underline{h}^0) + k'(\underline{h}^0)k'(\underline{h})$, 我们将对 $k^0(\underline{h}^0)k'(\underline{h}^0)$ 和 $k'(\underline{h}^0)k'(\underline{h})$ 分别作出估计。

第一步, 先考察 $k^0(\underline{h}^0)k'(\underline{h}^0)$. 这里 $(t^0, \underline{h}^0) \in [0, 1] \times F_g$ 是预先任意给定的。

$$\begin{aligned} & z_i(\underline{h}^0) \\ & \begin{array}{c} E_i^0 \\ E_i^0 \end{array} \quad P(\mu_i^0(\underline{h}^0)) \\ & \quad \quad \quad P(\mu_i^0(\underline{h}^0)) \\ & z_{i-1}(\underline{h}^0) \end{aligned}$$

对于 $\gamma_i^0(\underline{h}^0)$ 和 $\gamma_i(\underline{h}^0)$, 因为 $E_i^0(\underline{h}^0)$ 和 $E_i^1(\underline{h}^0)$ 作为基本极值曲线, $R_i^0(\underline{h}^0)$ 和 $R_i^1(\underline{h}^0)$ 作为 $A(\cdot, \underline{h})$ 的子曲线, 由引理 2 和引理 3 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\tilde{\sigma}_i > 0$, 使得当 $d(P(\mu_i^0(\underline{h}^0)), P(\mu_i^1(\underline{h}^0))) < \tilde{\sigma}_i$ 时, 有

$$\begin{aligned} E_i^0(\underline{h}^0)E_i^1(\underline{h}^0) &< \frac{\varepsilon}{8(n(\underline{h}^0) + 1)} \\ R_i^0(\underline{h}^0)R_i^1(\underline{h}^0) &< \frac{\varepsilon}{8(n(\underline{h}^0) + 1)} \end{aligned}$$

而对于上述 $\tilde{\sigma}_i > 0$, 由于 $P(\mu_i^0(\underline{h}^0))$ 和 $P(\mu_i^1(\underline{h}^0))$ 作为 $A(\cdot, \underline{h})$ 上的点, 故由引理 3 可知, 存在 $\tilde{\sigma}_i > 0$, 使得当 $|\mu_i^0(\underline{h}^0) - \mu_i^1(\underline{h}^0)| < \tilde{\sigma}_i$ 时, 有

$$d(P(\mu_i^0(\underline{h}^0)), P(\mu_i^1(\underline{h}^0))) < \tilde{\sigma}_i$$

又由 $\mu_i^1(\underline{h}^0)$ 的定义可知, 存在 $\sigma_i > 0$, 使得当 $|t - t^0| < \sigma_i$ 时, 有 $|\mu_i^0(\underline{h}^0) - \mu_i^1(\underline{h}^0)| < \tilde{\sigma}_i$. 综合上述便得: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma_i > 0$, 使得当 $|t - t^0| < \sigma_i$ 时, 有

$$\begin{aligned} E_i^0(\underline{h}^0)E_i^1(\underline{h}^0) &< \frac{\varepsilon}{8(n(\underline{h}^0) + 1)} \\ R_i^0(\underline{h}^0)R_i^1(\underline{h}^0) &< \frac{\varepsilon}{8(n(\underline{h}^0) + 1)} \end{aligned}$$

从而有

$$\gamma_i^0(\underline{h}^0)\gamma_i^1(\underline{h}^0) < \frac{\varepsilon}{4(n(\underline{h}^0) + 1)}$$

于是, 对每个 $\gamma_i^0(\underline{h}^0)$ 和 $\gamma_i^1(\underline{h}^0)$ 都这样做, 得到 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n(\underline{h}^0)+1}$, 只要 $|t - t^0| < \sigma_i$, 就有

$$\gamma_i^0(\underline{h}^0)\gamma_i^1(\underline{h}) < \frac{\varepsilon}{4(n(\underline{h}^0) + 1)} \quad i = 1, 2, \dots, n(\underline{h}^0) + 1$$

取 $\sigma = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n(\underline{h}^0)+1}\}$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 σ , 当 $|t - t^0| < \sigma$ 时, 有

$$k^0(\underline{h}^0)k^1(\underline{h}) \leq \sum_{i=1}^{n(\underline{h}^0)+1} \gamma_i^0(\underline{h}^0)\gamma_i^1(\underline{h}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

第二步, 考察 $k^1(\underline{h}^0)k^1(\underline{h})$.

先假设 $n(\underline{h}^0)\alpha(\underline{h}^0) \neq ((\underline{h}^0))$. 于是, 存在 δ_0 满足分割引理 6 中 δ 的条件, 使得对于任意 $\underline{h} \in F_\alpha$, $\underline{h} \underline{h}^0 < \delta_0$, $\underline{h}$ 能被 $\alpha(\underline{h})$ 分割成 $n(\underline{h}) + 1$ 条子曲线, $\underline{h}^0$ 能被 $\alpha(\underline{h}^0)$ 分割成 $n(\underline{h}^0) + 1$ 条子曲线, 并且由引理 6 可知 $n(\underline{h}) = n(\underline{h}^0)$

对于 $\gamma_i^1(\underline{h}^0)$ 和 $\gamma_i^1(\underline{h})$, 由引理 2, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(z_{i-1}(\underline{h}^0), z_{i-1}(\underline{h})) < \delta$ 和 $d(P(\mu_i^1(\underline{h}^0)), P(\mu_i^1(\underline{h}))) < \delta$ 时, 有

$$E_i^1(\underline{h}^0)E_i^1(\underline{h}) < \frac{\varepsilon}{4(n(\underline{h}^0) + 1)}$$

又由引理 3, 对于上述 $\delta > 0$, 存在 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$, 使得当 $\underline{h}^0 \underline{h} < \sigma_2$, 以及 $|\mu_{i-1}(\underline{h}^0) - \mu_{i-1}(\underline{h})| < \sigma_1$ 和 $|\mu_i^1(\underline{h}^0) - \mu_i^1(\underline{h})| < \sigma_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} d(z_{i-1}(\underline{h}), z_{i-1}(\underline{h}^0)) &< \delta \\ d(P(\mu_i^1(\underline{h}^0)), P(\mu_i^1(\underline{h}))) &< \delta \end{aligned}$$

而对于上述 σ_1 , 由于 $\alpha(\underline{h})$ 关于 $\underline{h} \in F_\alpha$ 是连续的, 故存在 $\tau_1 > 0$, 使得当 $\underline{h} \underline{h}^0 < \tau_1$ 时, $|\alpha(\underline{h}) - \alpha(\underline{h}^0)| < \sigma_1/2(n(\underline{h}^0) + 1)$, 从而, 有

$$\begin{aligned} |\mu_{i-1}(\underline{h}^0) - \mu_{i-1}(\underline{h})| &= \frac{(i-1)\sigma_1}{2(n(\underline{h}^0) + 1)} < \frac{\sigma_1}{2} < \sigma_1 \\ |\mu_i^1(\underline{h}^0) - \mu_i^1(\underline{h})| &= |t \mu_i^1(\underline{h}^0) + (1-t)\mu_{i-1}(\underline{h}^0) - t \mu_i^1(\underline{h}) - (1-t)\mu_{i-1}(\underline{h})| \\ &\leq t|\mu_i^1(\underline{h}^0) - \mu_i^1(\underline{h})| + (1-t)|\mu_{i-1}(\underline{h}^0) - \mu_{i-1}(\underline{h})| \\ &< \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} = \sigma_1 \end{aligned}$$

于是, 只要 $\underline{h} \underline{h}^0 < \tau_1 < \delta_0$, 就有 $E_i^1(\underline{h}^0)E_i^1(\underline{h}) < \varepsilon/4(n(\underline{h}^0) + 1)$ 另外, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\tau_2 < \tau_1$, 使得当 $\underline{h} \underline{h}^0 < \tau_2$ 时, $R_i^1(\underline{h}^0)R_i^1(\underline{h}) < \varepsilon/4(n(\underline{h}^0) + 1)$. 从而, 当 $\underline{h} \underline{h}^0 < \tau_2$ 时, 有 $\gamma_i^1(\underline{h}^0)\gamma_i^1(\underline{h}) < \varepsilon/2(n(\underline{h}^0) + 1)$. 对于每个 $\gamma_i^1(\underline{h}^0)$ 和 $\gamma_i^1(\underline{h})$ 都这样做, 则只要 $\underline{h} \underline{h}^0 < \tau$ 就有 $k^1(\underline{h}^0)k^1(\underline{h}) < \varepsilon/2$.

对于 $((\underline{h}^0)) = n(\underline{h}^0)\alpha(\underline{h}^0)$ 的情形, 同样可以证明这个结论, 仅是叙述上的差别而矣, 其本质是一样的, 故略.

因此, 综合上述两个步骤知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \tau > 0$, 当 $|t - t^0| < \sigma, \underline{h} \underline{h}^0 < \tau$ 时, 有

$$k^0(\underline{h}^0)k^1(\underline{h}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

至此, 我们证明了映射 D 的连续性, 故 D 确为形变映射。
形变引理得证。

由于 D 为形变, 故 $D(\underline{h}, 0) = i_{F_g}(\underline{h})$ 与 $D(\underline{h}, 1) = \zeta^{n(\underline{h})}(\underline{h})$ 为同伦映射, 从而它们诱导出同调群上的同构, 即 F_g 上的同调群与 ζF_g 上的同调群同构. 所以, Fréchet 数 R_i 即 F_g 上的 i -连通数等于 ζF_g 上的 i -连通数, 而我们知道, 这种折极值曲线组成的空间 ζF_g 的 i -连通数至多为可数无限, 从而我们得到本文的主要结果:

定理 Fréchet 数 R_i 至多为可数无限.

结合 M. Morse 在 [4] 中的结论, 有

推论: 光滑紧致流形 M_n 上的 (J, g) -型数 m^F 不小于 M_n 上的 Fréchet 数 R_i . 即 $m^F \geq R_i$

这里我们不需要 Morse 在 [4] 中对不等式在 m^F 为无限时所作的约定

参 考 文 献

- 1 Morse M. Fréchet Number in Global Variational Analysis. Houston J. Math 1976;2(3)
- 2 Morse M. Global Variational Analysis, MNS. Princeton University Press, 1976
- 3 Landis D, Morse M. Geodesic joins and Fréchet Curve Classes. Rendiconti di Matematica Ser. V. 1975;8:161~185
- 4 Morse M. Uses of the Fréchet Numbers of a smooth Manifold. Houston J. Math. 1977;3(4):503~513
- 5 曹建国, 陆文钊. n 个同伦等价的空间与 Fréchet 数. 数学学报, 1985;6

Fréchet Numbers on Compact Smooth Manifolds

Fei Wentao

(Dept. of General Education)

Abstract We give such a real function $\alpha: F_g \rightarrow \mathbb{R}^+$ that the J -diameter of the subcurve of a canonical curve $A(\cdot, \underline{h})$ is less than $\underline{m}$, since the μ -length of this subcurve is less than $\alpha(\underline{h})$ for any case in which $\underline{h}$ in F_g . Therefore, by proving the split lemma and the deformation lemma, we obtain the main result that the i -Fréchet number is at most countable infinite.

Key-words Compact manifolds; (J, g) -extremal curve; (J, g) -type number; Connectivity number; Fréchet number