

2-距离空间上的膨胀型映射

刘华玲

(基础课部)

摘要 给出了2-距离空间上二类膨胀型映射的不动点定理,并进行了相应的推广。

关键词 2-距离空间;膨胀型映射;不动点;满射

在文献[1]中,Gähler 首先引入2-距离空间的概念,并较深入地讨论了这一空间的拓扑性质。关于2-距离空间映射的不动点定理的研究,是在1976年由 Iséki 等人开始的^[2],他们把众所周知的 Banach 压缩映射原理推广到2-距离空间。随后又有许多数学工作者进一步地研究了2-距离空间的不动点理论,如 Khan,Fisher^[3],Rhoades^[4]以及我国的张石生等人,在文献[5]中,对于2-距离空间中压缩型映射的不动点定理,作了较为系统的论述和介绍。

在2-距离空间中,做为与压缩型映射相对应的膨胀型映射的不动点定理,目前尚未见有关结果。本文将提出二类2-距离空间中的膨胀型映射,并研究其有关的不动点定理。

为了叙述方便起见,先引入如下的定义。

定义1 (X, d) 称为2-距离空间,如果 X 是一距离空间, d 是定义在 $X \times X \times X$ 上满足下述条件的非负实值函数:

- 1) 对每两个点 $a, b \in X, a \neq b$, 存在一点 $c \in X$, 使得 $d(a, b, c) \neq 0$;
- 2) $d(a, b, c) = 0$, 当 a, b, c 中至少有二点相等;
- 3) $d(a, b, c) = d(a, c, b) = d(b, c, a)$;
- 4) $d(a, b, c) \leq d(a, b, x) + d(a, x, c) + d(x, b, c)$, 其中 x 是 X 中任意一点。

定义2 设 $\{x_n\}$ 是2-距离空间 (X, d) 中的序列。 $\{x_n\}$ 称为 X 中的 Cauchy 列, 若

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m, a) = 0 \quad \forall a \in X$$

$\{x_n\}$ 称为 X 中的收敛序列, 若存在 $x \in X$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x, a) = 0, \quad \forall a \in X$$

并记 $x_n \rightarrow x$ 。

2-距离空间 (X, d) 称为完备的, 若 X 中每一 Cauchy 列都是 X 中的收敛列。

收稿日期:1993-05-31

下面将给出主要结论。

定理 1 设 (X, d) 是完备的 2-距离空间, T 为空间上连续的自映射, 且为满射, 对于 $\forall x, y, a \in X$, 存在 $h > 1$, 使得

$$d(Tx, Ty, a) \geq h \min\{d(x, y, a), d(x, Tx, a), d(y, Ty, a)\}$$

则 T 在 X 中存在不动点。

证明: 对 $\forall x_0 \in X$, 由于 T 是满射, 故其原像存在, 不妨取为 x_1 , 使 $Tx_1 = x_0$; 再取 x_1 的原像为 x_2 , 使 $Tx_2 = x_1$; …… 这样继续下去可得到点列 $\{x_n\}$, 使 $Tx_n = x_{n-1}$. 结合题设给出的条件, 有

$$\begin{aligned} d(x_1, x_0, a) &= d(Tx_2, Tx_1, a) \\ &\geq h \min\{d(x_2, x_1, a), d(x_2, Tx_1, a), d(x_1, x_0, a)\} \\ &= hd(x_2, x_1, a) \end{aligned}$$

即
$$d(x_2, x_1, a) \leq \frac{1}{h} d(x_1, x_0, a)$$

同理
$$d(x_3, x_2, a) \leq \frac{1}{h} d(x_2, x_1, a)$$

归纳之, 对任意的 n 有

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n, a) &\leq \frac{1}{h} d(x_n, x_{n-1}, a) \\ &\leq \frac{1}{h^2} d(x_{n-1}, x_{n-2}, a) \\ &\leq \dots\dots \\ &\leq \frac{1}{h^n} d(x_1, x_0, a) \end{aligned}$$

下面证 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 取正整数 n, m ; 且 $n < m$.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m, a) &\leq d(x_n, x_m, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}, a) + d(x_{n+1}, x_m, a) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}, x_m) + d(x_n, x_{n+1}, a) + d(x_{n+1}, x_m, x_{n+2}) \\ &\quad + d(x_{n+1}, x_{n+2}, a) + d(x_{n+2}, x_m, a) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}, x_m) + d(x_n, x_{n+1}, a) + d(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) \\ &\quad + d(x_{n+1}, x_{n+2}, a) + d(x_{n+2}, x_m, x_{n+3}) \\ &\quad + d(x_{n+2}, x_{n+3}, a) + d(x_{n+3}, x_m, a) \\ &\leq \dots\dots \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}, x_m) + d(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) + \dots\dots \\ &\quad + d(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) + d(x_n, x_{n+1}, a) + d(x_{n+1}, x_{n+2}, a) \\ &\quad + \dots\dots + d(x_{m-1}, x_m, a) \\ &\leq \left(\frac{1}{h^n} + \dots\dots + \frac{1}{h^{m-2}} \right) d(x_1, x_0, x_m) \\ &\quad + \left(\frac{1}{h^n} + \dots\dots + \frac{1}{h^{m-1}} \right) d(x_1, x_0, a) \end{aligned}$$

由空间的有界性知, 存在 $K > 0$ 使

$$d(a, b, c) \leq K, \forall a, b, c \in X$$

故有

$$d(x_n, x_m, a) \leq 2 \left(\frac{1}{h^n} + \dots + \frac{1}{h^{m-1}} \right) K$$

又 $h > 1, \frac{1}{h} < 1$, 故当 n 充分大时, 有

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m, a) = 0$$

即 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 由空间的完备性, 可知有 $u \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$.

由于 $x_n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$, 同时考虑到 $x_{n-1} = Tx_n$, 根据 T 的连续性, 得 $Tx_n \rightarrow Tu$, 又因为 $x_{n-1} \rightarrow u$, 故有 $u = Tu$.

很明显, 定理 1 中 T 的不动点集为闭集. 因为, 若 $x_n \rightarrow x_0$, 且 $x_n = Tx_n$, 由 T 的连续性 $x_n = Tx_n \rightarrow Tx_0$, 故 $x_0 = Tx_0$.

下面来看一下映射对的情况

定理 2 设 (X, d) 是完备的有界 2-距离空间, S, T 为空间上的连续自映射, 而且是满射, 满足条件: 存在常数 $h > 1$, 使对任意的 $x, y, a \in X$, 有

$$d(Sx, Ty, a) \geq h \min\{d(x, y, a), d(x, Sx, a), d(y, Ty, a)\}$$

则 S, T 在 X 存在公共不动点.

证明: 对 $\forall x_0 \in X$, 因 S 为满射, 故可取 x_0 的原像为 x_1 , 使 $x_0 = Sx_1$; 又因 T 为满射, 故存在 x_2 , 使 $x_1 = Tx_2$; $\dots x_{2n} = Sx_{2n+1}, x_{2n+1} = Tx_{2n+2}, \dots$ 由此得序列 $\{x_n\}$

用类似于定理 1 中的证明方法, 得

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a) \leq \frac{1}{h} d(x_{2n}, x_{2n+1}, a)$$

及

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+3}, a) \leq \frac{1}{h} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a)$$

综合之, 有

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}, a) &\leq \frac{1}{h} d(x_{n-1}, x_n, a) \\ &\leq \frac{1}{h^2} d(x_{n-2}, x_{n-1}, a) \\ &\leq \dots \\ &\leq \frac{1}{h^n} d(x_0, x_1, a) \end{aligned}$$

类似地, 可证出对于正整数 $n, m, n < m$, 与定理 1 中证明相似的结论.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m, a) &\leq \left(\frac{1}{h^n} + \dots + \frac{1}{h^{m-2}} \right) d(x_1, x_0, x_m) \\ &\quad + \left(\frac{1}{h^n} + \dots + \frac{1}{h^{m-1}} \right) d(x_1, x_0, a) \end{aligned}$$

由于空间的有界性, 则有 $K > 0$, 使

$$d(a, b, c) \leq K, \forall a, b, c \in X$$

故有 $d(x_n, x_m, a) \leq 2 \left(\frac{1}{h^n} + \dots + \frac{1}{h^{m-1}} \right) K$, 又 $h > 1, \frac{1}{h} < 1$, 故当 n 充分大时, 有

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m, a) = 0$$

即 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 再由空间完备性知存在 $u \in X$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$.

下面证明 u 是 S, T 的公共不动点.

由于 $x_n \rightarrow u$. 而 $Tx_{2n} = x_{2n-1}$, 由 T 的连续性, 得 $Tx_{2n} \rightarrow Tu$, 又 $x_{2n-1} \rightarrow u$, 故有 $Tu = u$; 再根据, $Sx_{2n+1} = x_{2n}$, 以及 S 的连续性, 同理可证 $Su = u$.

即 u 是 S, T 的公共不动点。

证毕。

与前面的相类似, 还可以推广到更一般的情况。

定理 3 设 X 为完备的有界 2- 距离空间, T 为其上的连续自映射, 而且是满射, 存在有函数 $\varphi(t): R^+ \rightarrow R^+ = [0, \infty)$, 使得对 $\forall x, y, a \in X$, 都有下式:

$$\varphi(d(Tx, Ty, a)) \geq \min \{d(x, y, a), d(x, Tx, a), d(y, Ty, a)\}$$

而对 $\forall t \in (0, \infty)$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < +\infty, \varphi \text{ 不减}$$

而且 $\varphi(0) = 0$

则 T 在 X 中存在不动点。

证明过程与前定理类似, 故略。

下面将给出另一类映射的结果。

定理 4 设 (X, d) 是完备有界的 2- 距离空间, T 为空间上连续的自映射, 且为满射对于 $\forall x, y, a \in X$, 存在 $\frac{1}{2} < h < 1$, 使得

$$d(Tx, Ty, a) \geq h \cdot d(x, Tx, a) + h \cdot d(y, Ty, a)$$

则 T 在 X 中存在不动点。

证明: 类似于定理 1 的证明, 可得点列 $\{x_n\}$, 使 $Tx_n = x_{n-1}$, 结合题设条件有:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_0, a) &= d(Tx_2, Tx_1, a) \\ &\geq h \cdot d(x_2, x_1, a) + h \cdot d(x_1, x_0, a) \end{aligned}$$

$$d(x_2, x_1, a) \leq \frac{1-h}{h} d(x_1, x_0, a)$$

$$\begin{aligned} \text{同理: } d(x_3, x_2, a) &\leq \frac{1-h}{h} d(x_2, x_1, a) \\ &\leq \left(\frac{1-h}{h}\right)^2 d(x_1, x_0, a) \end{aligned}$$

归纳之, 对任意的 n 有

$$d(x_{n+1}, x_n, a) \leq \left(\frac{1-h}{h}\right)^n d(x_1, x_0, a)$$

同定理 1 之证明, 可得

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m, a) &\leq \left[\left(\frac{1-h}{h}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1-h}{h}\right)^{m-2}\right] \cdot d(x_1, x_0, x_m) \\ &\quad + \left[\left(\frac{1-h}{h}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1-h}{h}\right)^{m-1}\right] \cdot d(x_1, x_0, a) \end{aligned}$$

由空间的有界性知, 存在 $K > 0$, 使

$$d(x_n, x_m, a) \leq 2 \left[\left(\frac{1-h}{h}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1-h}{h}\right)^{m-1}\right] \cdot K$$

又 $\frac{1-h}{h} < 1$, 故当 n 充分大时, 有

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m, a) = 0$$

即 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 由空间的完备性, 可知有 $u \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$.

由于 $x_n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$, 同时考虑到 $x_{n-1} = Tx_n$, 根据 T 的连续性, 得 $Tx_n \rightarrow Tu$, 又因为 $x_{n-1} \rightarrow u$ 故有 $u = Tu$.

证毕。

接下来研究定理 4 中映射的不动点个数问题。

引理 设 X 是完备的 2-距离空间, T 为其上的如定理 4 所给出的膨胀映射, 且为一一对应, 其逆射为 G, x 为 T 的不动点, $E_x = \{y | G^n y \rightarrow x, n \rightarrow \infty\}$. 若 E_x 有聚点, 则聚点唯一。

证明: 显然 $E_x \neq \emptyset$, 设 x_0 为 E_x 的聚点, 则有点列 $\{x_k\} \subseteq E_x, x_k \neq x_0$, 且 $x_k \rightarrow x_0$. 由于 T 与 G 均是一一对应, 由 $x_k \neq x_0$, 有 $Gx_k \neq Gx_0$. 则由

$$d(x_k, x_0, a) = d(TGx_k, TGx_0, a) \geq hd(Gx_k, x_k, a) + hd(Gx_0, x_0, a)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $d(x_k, x_0, a) \rightarrow 0$, 又 $h > 0$, 则由上式有 $d(Gx_k, x_k, a) \rightarrow 0$, 同时注意到 $x_k \rightarrow x_0$, 故有 $Gx_k \rightarrow x_0$.

重复上述过程可得

$$G^2 x_k \rightarrow x_0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

从而可得下述关系:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & Gx_1, & G^2 x_1, & \cdots, & G^n x_1, & \cdots & \rightarrow x \\ x_2, & Gx_2, & G^2 x_2, & \cdots, & G^n x_2, & \cdots & \rightarrow x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ x_k, & Gx_k, & G^2 x_k, & \cdots, & G^n x_k, & \cdots & \rightarrow x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ x_0, & x_0, & x_0, & & x_0, & & \end{array}$$

对于每个固定的 k , 有:

$$\begin{aligned} d(G^m x_k, G^{m-1} x_k, a) &= d(TG^{m+1} x_k, TG^m x_k, a) \\ &\geq h \cdot d(G^{m+1} x_k, G^m x_k, a) + h \cdot d(G^m x_k, G^{m-1} x_k, a) \end{aligned}$$

则

$$\left(\frac{1-h}{h} \right) d(G^m x_k, G^{m-1} x_k, a) \geq d(G^{m+1} x_k, TG^m x_k, a)$$

令

$$\frac{1-h}{h} = \alpha, \text{ 由 } \frac{1}{2} \leq h \leq 1, \text{ 知 } \alpha \in (0, 1)$$

则有 $d(G^{m+1} x_k, G^m x_k, a) \leq \alpha \cdot d(G^m x_k, G^{m-1} x_k, a)$

$$\leq \cdots \leq \alpha^m \cdot d(Gx_k, x_k, a)$$

又对于任意的 m, n , 且 $m > n$

$$\begin{aligned} d(G^m x_k, G^n x_k, a) &\leq d(G^m x_k, G^{m-1} x_k, a) + d(G^{m-1} x_k, G^{m-2} x_k, a) \\ &\quad + \cdots + d(G^{n+1} x_k, G^n x_k, a) \\ &\leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n) d(Gx_k, x_k, a) \end{aligned}$$

又 $d(Gx_k, x_k, a) \rightarrow 0$, 故序列 $\{d(Gx_k, x_k, a)\}$ 有界, 即存在常数 $M > 0$, 对任意的 K 有

$$d(Gx_k, x_k, a) \leq M$$

故

$$\begin{aligned} d(G^m x_k, G^n x_k, a) &\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha^n) d(Gx_k, x_k, a) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} M \end{aligned}$$

在上式中, 令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$d(x, G^n x_k, a) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} M$$

而当 n 充分大时, 可得

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} M < \varepsilon$$

所以, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, $d(x, G^n x_k, a) < \varepsilon$.

令 $K \rightarrow \infty$ 得, $d(x_0, x, a) \leq \varepsilon$, 即 $x_0 = x$, x 为 E_k 的一个聚点, 则聚点唯一。

证毕。

定理 5 设 X 为 Banach 空间, (X, d) 为 2-距离空间, T 为其上一一对应的如定理 4 所述的膨胀映射, 那么 T 的不动点集是非可数集。

证明: 用反证法证明。

先设 T 的逆映射为 G , 若 T 的不动点集为 $\{x_n\}$, 其中 n 为有限数或可数。而设 E_n 为 X 中的一切在 G 作用下的迭代收敛于 x_n 的点构成的集合, 即 $E_n = \{y | G^m y \rightarrow x_n, y \in X, m \rightarrow \infty\}$, 由定理的证明过程可以看出 X 中任意一点在 G 的迭代作用下, 必收敛于某一不动点, 则 X 中的任意一点必属于某一个 E_n , 于是

$$X = \bigcup_n E_n$$

根据 Baire 纲定理, 至少有一个 E_n 在某一球 S 中是稠密的。由此可知, S 中每个点均属于 E_n , 因为若 $y \in S$ 而 $y \notin E_n$, 则 y 必为 E_n 的聚点, 由引理知, $y = x_n \in E_n$, 矛盾。而 X 是 Banach 空间, 则必是线性赋范空间, 则 S 中每个点都是 S 的聚点, 因而就是 E_n 的聚点。由引理, S 中每个点都等于 x_n , 则球 S 中只有一个点了, 这对于线性赋范空间来说是不可能的, 所以, T 的不动点集只能是不可数集。

证毕。

参 考 文 献

1 Gähler S. Math. Nachr, 1963, 26(64): 115~148

2 Iseki K, Sharma P L, Sharma B K. Math. Japonica, 1976, 21: 67~70

3 Khan M S, Fisher B. Math. Nachr, 1982, 106: 323~326

4 Rhoades B E. Math. Nachr, 1979, 91: 151~155

5 张石生. 不动点理论及应用. 重庆出版社, 1984

The Expansive Type Mappings on 2-metric Space

Liu Hualing

(Dept. Fundamental Course)

Abstract The fixed point theorems of expansive type mapping on 2-metric space are given and generalized.

Key-words 2-metric space; Expansive type mapping; Fixed point; Surjection