

一种自动考虑剪切效应的 矩形层合板单元

范本隽

(机械工程系)

摘要 以应变能分项插值的思想构造层合板单元。这种单元计入了横向剪切变形的影响,且当板厚趋薄时自动满足 Kirchhoff 约束,还具有构造简单、计算速度快的优点。

关键词 有限元; 矩形单元; 层合板; 剪切效应

0 前言

随着复合材料在工程中广泛使用,对层合板壳计算方法的研究亦有许多进展^[1~3]。在用有限元法分析层合板的工作中,或使用以 Kirchhoff 假定为基础的“薄板”单元,或使用假设结点独立转角的“中厚板”单元。前者不能反映横向剪切变形的影响,后者虽反映了横向剪切变形但当板厚趋薄时不能从位移模式上自动满足 Kirchhoff 约束。层合板由于其特殊的构造,一般横向剪切刚度相对较小,因而剪切作用较为明显,层合中厚板更不可忽略剪切变形;而在薄板情形则又必须满足 Kirchhoff 约束。但是中厚板与薄板之间并没有截然划分,再者对层合板也不能仅以厚度来判断剪切影响的大小。因此,本文在吸收、改进文献[4]提出的一种考虑剪切变形的板单元的基础上,构造了考虑剪切变形的层合板单元,它在板的弯曲刚度与剪切刚度之比 D/C 较大时,计算结果与中厚板理论一致;而当 D/C 趋于零时,计算结果与薄板理论相同,不存在某些考虑剪切变形的板单元遇到的剪切自锁问题。因而能方便地应用各种厚度和各种刚度的层合板计算。

1 单层板的位移模式

1.1 考虑剪切变形的梁变形函数

本文对位移进行插值是以一种自动考虑剪切影响的梁变形函数为基础的,具体推导见文献[4]。如图1所示的梁单元,1、2为结点, w_1, w_2 为结点挠度, ψ_1, ψ_2 为结点转角。挠度和

收稿日期:1994-07-08

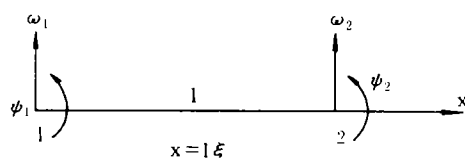


图1 梁单元

转角插值函数为

$$\begin{aligned}
 w(\xi) &= G_0^1(\xi)w_1 + lG_1^1(\xi)\psi_1 \\
 &\quad + G_0^2(\xi)w_2 + lG_1^2(\xi)\psi_2 \\
 \psi(\xi) &= \frac{1}{l}J_0^1(\xi)w_1 + J_1^1(\xi)\psi_1 \\
 &\quad + \frac{1}{l}J_0^2(\xi)w_2 + J_1^2(\xi)\psi_2
 \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned}
 G_0^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^1(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}(1-\xi) \\
 G_1^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^1(\xi) + \frac{\varphi}{2(1+\varphi)}(\xi-\xi^2) \\
 G_0^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^2(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}\xi \\
 G_1^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^2(\xi) - \frac{\varphi}{2(1+\varphi)}(\xi-\xi^2) \\
 J_0^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^{1'}(\xi) \\
 J_1^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^{1'}(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}(1-\xi) \\
 J_0^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^{2'}(\xi) \\
 J_1^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^{2'}(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}\xi
 \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\varphi = 12D/Cl^2$ 为无量纲参数, $H_0^i(\xi)$ 等为 Hermite 三次多项式:

$$\begin{aligned}
 H_0^1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & H_1^1(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\
 H_0^2(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 & H_1^2(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3
 \end{aligned} \quad (3)$$

可见当 $D/C \rightarrow 0$ 时自动退化为不考虑剪切变形的梁。

1.2 单层板的位移模式

这里所说的单层板,后面将作为层合板中的某一层。因此要考虑弯曲与拉压的耦合。对图2所示的板单元,结点位移、转角为

$$\begin{aligned}
 \{\delta_e\} &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \psi_{xi} \quad \psi_{yi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \psi_{xj} \quad \psi_{yj} \\
 &\quad u_m \quad v_m \quad w_m \quad \psi_{xm} \quad \psi_{ym} \quad u_n \quad v_n \quad w_n \quad \psi_{xn} \quad \psi_{yn}]^T \\
 &= \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_n \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4)$$

与结点在同一平面内、坐标为 x, y 的点 P 的位移、转角为

$$\{\delta^p\} = [u^0 \quad v^0 \quad w \quad \psi_x \quad \psi_y]^T \quad (5)$$

与 P 点在同一法线上的点的位移、转角为

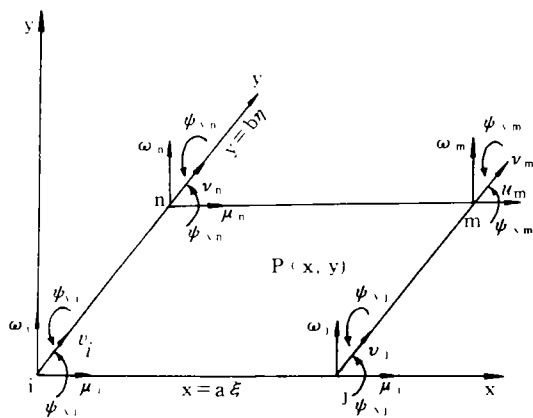


图2 单层板单元

$$\{\delta\} = [u \ v \ w \ \psi_x \ \psi_y]^T \quad (6)$$

其中 $u = u^0(x, y) - z\psi_x$, $v = v^0(x, y) - z\psi_y$. 故应选取适当的插值函数对 u^0 、 v^0 、 w 、 ψ_x 、 ψ_y 进行插值。

通常为有限元计算结果单调收敛, 板的挠度函数应具有足够的连续性, 这使问题复杂化。事实上有许多成功的板单元往往放松了某些连续性方面的要求。本文采用 Kikuchi 提出的“应变能分项插值”与“元素分项协调”的概念^[5], 即, 位移函数在单元间的连续性分项满足应变能表达式中各项对连续性的要求, 使计算的应变能收敛, 就有可能构造出收敛的单元。为此推导应变能表达式:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \epsilon_y^0 - z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 - z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{-c_1}^{c_2} \left(\int_0^a \int_0^b \left[A_{11} (\epsilon_x^0 - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x})^2 + 2A_{12} (\epsilon_x^0 - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}) (\epsilon_y^0 - z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}) \right. \right. \\ &\quad + A_{22} (\epsilon_y^0 - z \frac{\partial \psi_y}{\partial y})^2 + G_{12} (\gamma_{xy}^0 - z \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_y}{\partial x})^2 + G_{13} (\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x)^2 \\ &\quad \left. \left. + G_{23} (\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y)^2 \right] dx dy \right) dz \end{aligned} \quad (9)$$

根据应变能 U 的表达式, 在单元内进行如下的分项插值; 设板在 x 、 y 方向的弯曲刚度为 D_{11} 、 D_{22} , 剪切刚度为 C_{11} 、 C_{22} , 在 x 方向插值时 $G_0^1(\xi)$ 、 $J_0^1(\xi)$ 等函数中的 φ 取 φ_1 , $\varphi_1 = \frac{12D_{11}}{C_{11}a^2}$, 在 y

方向插值时这些函数中的 φ 取 φ_2 , $\varphi_2 = \frac{12D_{22}}{C_{22}b^2}$ 。

1.2.1 计算 $\frac{\partial \psi_x}{\partial x}$ 和 $(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x)$ 时用

$$\begin{aligned} w &= [G_0^1(\xi)w_i + aG_1^1(\xi)\psi_{xi} + G_0^2(\xi)w_j + aG_1^2(\xi)\psi_{xj}](1 - \eta) \\ &\quad + [G_0^1(\xi)w_n + aG_1^1(\xi)\psi_{xn} + G_0^2(\xi)w_m + aG_1^2(\xi)\psi_{xm}]\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_x = & \left[\frac{1}{a} J_0^1(\xi) w_i + J_1^1(\xi) \psi_{xi} + \frac{1}{a} J_0^2(\xi) w_j + J_1^2(\xi) \psi_{xj} \right] (1 - \eta) \\ & + \left[\frac{1}{a} J_0^1(\xi) w_n + J_1^1(\xi) \psi_{xn} + \frac{1}{a} J_0^2(\xi) w_m + J_1^2(\xi) \psi_{xm} \right] \eta\end{aligned}\quad (10)$$

1.2.2 计算 $\frac{\partial \psi_y}{\partial y}$ 和 $(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y)$ 时用

$$\begin{aligned}w = & [G_0^1(\eta) w_i + b G_1^1(\eta) \psi_{yi} + G_0^2(\eta) w_n + b G_1^2(\eta) \psi_{yn}] (1 - \xi) \\ & + [G_0^1(\eta) w_j + b G_1^1(\eta) \psi_{yj} + G_0^2(\eta) w_m + b G_1^2(\eta) \psi_{ym}] \cdot \xi \\ \psi_y = & \left[\frac{1}{b} J_0^1(\eta) w_i + J_1^1(\eta) \psi_{yi} + \frac{1}{b} J_0^2(\eta) w_n + J_1^2(\eta) \psi_{yn} \right] (1 - \xi) \\ & + \left[\frac{1}{b} J_0^1(\eta) w_j + J_1^1(\eta) \psi_{yj} + \frac{1}{b} J_0^2(\eta) w_m + J_1^2(\eta) \psi_{ym} \right] \cdot \xi\end{aligned}\quad (11)$$

1.2.3 计算 $\frac{\partial \psi_x}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial \psi_y}{\partial x}$ 时用

$$\begin{aligned}\psi_x = & (1 - \xi)(1 - \eta) \psi_{xi} + \xi(1 - \eta) \psi_{xj} + \xi \eta \psi_{xm} + (1 - \xi) \eta \psi_{xn} \\ \psi_y = & (1 - \xi)(1 - \eta) \psi_{yi} + \xi(1 - \eta) \psi_{yj} + \xi \eta \psi_{ym} + (1 - \xi) \eta \psi_{yn}\end{aligned}\quad (12)$$

1.2.4 计算 $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ 及分布荷载作功时用

$$\begin{aligned}u^0 = & (1 - \xi)(1 - \eta) u_i + \xi(1 - \eta) u_j + \xi \eta u_m + (1 - \xi) \eta u_n \\ v^0 = & (1 - \xi)(1 - \eta) v_i + \xi(1 - \eta) v_j + \xi \eta v_m + (1 - \xi) \eta v_n \\ w = & (1 - \xi)(1 - \eta) w_i + \xi(1 - \eta) w_j + \xi \eta w_m + (1 - \xi) \eta w_n\end{aligned}\quad (13)$$

上述位移模式改变了文献[4]把单元划分成4个区,在4个区内分别插值,从而位移在单元内明显间断的状况,使各区使用统一的插值函数,从而比较合理也便于计算机计算。在单元之间的边界上,位移是按应变能分项协调的,但在不同插值模式之间存在某些不影响应变能计算的不协调性,所以这样构造的单元是不完全协调元。

2 层合板有限元格式

如图3所示,将层合板置于坐标系内,使层面与XY平面平行。按前述法则使用插值函数,将单元内的位移用单元结点位移表示为

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{l=i,j,m,n} [N_l] \{\delta_l\} \quad (14)$$

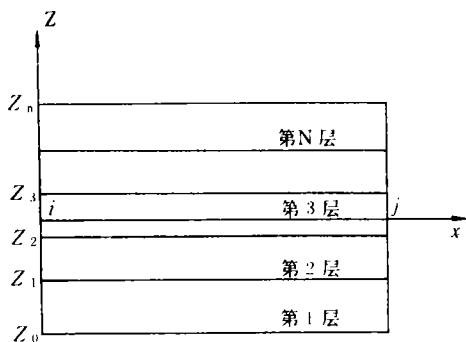


图3 层合板单元

单元内的应变

$$\begin{aligned}\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \sum_{l=i,j,m,n} L[N_l] \{\delta_l\} \\ &= \sum_{l=i,j,m,n} [B_l] \{\delta_l\}\end{aligned}\quad (15)$$

式中

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

为微分算符; $[B_l] (l = i, j, m, n)$ 为单元应变子矩阵, 它的各元素见附录。

层合板的材料多为正交各向异性材料且一根弹性主轴方向与板面法线即 Z 轴方向一致。若另两根弹性主轴方向与 X, Y 轴方向一致时, 第 K 层的弹性矩阵 $[D_K]$ 可表示为

$$[D_K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中 $A_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, A_{12} = \frac{E_1\mu_{21}}{1 - \mu_{21}\mu_{12}}, A_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{21}\mu_{12}}$ 。若另两根弹性主轴方向与 X, Y 轴夹角为 θ 时, 需对弹性矩阵作坐标变换:

$$[\tilde{D}_K] = [T_*]^T [D_K] [T_*] \quad (18)$$

式中

$$[T_*] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (19)$$

为应变的坐标变换矩阵。

单元第 K 层中应力

$$\{\sigma\} = [\tilde{D}_K] \{\epsilon\} = \sum_{l=i,j,m,n} [S_l] \{\delta_l\} \quad (20)$$

单元刚度矩阵

$$[K^e] = \sum_{K=1}^N \int_{z_{K-1}}^{z_K} \int_a^b \int_0^b [B]^T [\tilde{D}_K] [B] dx dy dz \quad (21)$$

式中 N 为层数; 矩阵 $[B] = [[B_i][B_j][B_m][B_n]]$ 。

在计算单元刚度矩阵各元素的值时, 为免除繁复的多项式相乘和积分运算, 在 x, y, z 三个方向都作坐标变换

$$\begin{aligned} x &= a\xi = a \cdot \frac{1 + \xi'}{2} \\ y &= b\eta = b \cdot \frac{1 + \eta'}{2} \quad (\xi', \eta', \zeta' \in [-1, 1]) \end{aligned} \quad (22)$$

$$z = \frac{1 - \zeta'}{2} Z_{K-1} + \frac{1 + \zeta'}{2} Z_K$$

用高斯求积公式作数值积分。由于被积函数在三个方向上都是最多为二次的多项式函数,故在 x, y 方向上各取 2 个高斯点,在 z 方向上每层取 2 个高斯点。单元刚度矩阵的子块 $[K_{st}]$ 的计算式为

$$\begin{aligned} [K_{st}] &= \sum_{K=1}^N \int_{Z_{K-1}}^{Z_K} \int_0^a \int_0^b [B_s]^T [\tilde{D}_K] [B_t] dx dy dz \\ &= \sum_{K=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_s]^T [\tilde{D}_K] [B_t] \cdot \frac{h_K ab}{8} d\xi' d\eta' d\zeta' \\ &= \sum_{K=1}^N \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 [B_s(\xi'_p, \eta'_q, \zeta'_r)]^T \cdot [\tilde{D}_K] \cdot \\ &\quad [B_t(\xi'_p, \eta'_q, \zeta'_r)] \cdot \frac{h_K ab}{8} W_p W_q W_r \end{aligned} \quad (23)$$

式中 W_p, W_q, W_r 为高斯权系数; $h_K = Z_K - Z_{K-1}$ 为第 K 层的层厚,对于等厚板 h_K 为常数,对于线性变厚度板可由 4 个结点处的层厚插值得到:

$$h_k = (1 - \xi)(1 - \eta)h_{ki} + \xi(1 - \eta)h_{kj} + \xi\eta h_{km} + (1 - \xi)\eta h_{kn} \quad (24)$$

将单元刚度矩阵组集成总刚度矩阵,并经计算等效结点载荷和作约束处理后建立总体平衡方程

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (25)$$

处理约束时注意每个边界结点有 5 个边界条件即 $u^0 = \bar{u}^0, v^0 = \bar{v}^0, w = \bar{w}, \psi_x = \bar{\psi}_x, \psi_y = \bar{\psi}_y$ 。可见设置总体坐标系时使约束位于 XY 平面内可便于施加边界条件。

解出结点位移后按常规步骤计算单元应力。如需计算各层承担的内力,可在 Z 方向进行积分: $(N_x)_K = \int_{Z_{K-1}}^{Z_K} \sigma_x dz, (M_x)_K = \int_{Z_{K-1}}^{Z_K} \sigma_x z dz$ 等等。

3 算 例

3.1 用层合板程序计算各种厚度的单层各向同性板

方板的边长为 a , 厚为 h , 受均布载荷 q 作用。计算时利用对称性取板的 1/4 划分网格。计算结果及与薄板理论解和厚板理论解的比较见表 1~4。表中的厚板理论解引自[6]。

表 1 四边固支方板的中心挠度系数

h/a	网 格	与薄板理论比较		与厚板理论比较	
		$\beta = W \frac{qa^4}{D}$	薄板理论解	$\alpha = W \frac{qa^4}{Eh^3}$	厚板理论解
0.001	2×2	0.00156			
	4×4	0.00134	0.00128		—
	8×8	0.00127			
0.010	2×2	0.00156			
	4×4	0.00134	0.00128		—
	8×8	0.00127			

续表 1

h/a	网 格	与薄板理论比较		与厚板理论比较	
		$\beta = W \Big/ \frac{qa^4}{D}$	薄板理论解	$\alpha = w \Big/ \frac{qa^4}{Eh^3}$	厚板理论解
0.100	2 × 2	0.00175		0.01907	
	4 × 4	0.00154	0.00128	0.01681	0.01634
	8 × 8	0.00147		0.01603	
0.200	2 × 2	0.00230		0.02515	
	4 × 4	0.00210	0.00128	0.02291	0.02331
	8 × 8	0.00202		0.02204	
0.400	2 × 2	0.00453		0.03528	
	4 × 4	0.00426	0.00128	0.03279	—
	8 × 8	0.00414		0.03176	

表 2 四边固支方板的中心弯矩系数(8 × 8 网格)

h/a	0.001	0.010	0.100	0.200	0.300	0.400
$\gamma = M/qa^2$	0.0233	0.0233	0.0236	0.0239	0.0241	0.0241
薄板理论解	$\gamma = 0.0231$					

表 3 四边简支方板的中心挠度系数

h/a	网 格	与薄板理论比较		与厚板理论比较	
		$\beta = W \Big/ \frac{qa^4}{D}$	薄板理论解	$\alpha = W \Big/ \frac{qa^4}{Eh^3}$	厚板理论解
0.001	2 × 2	0.00425			
	4 × 4	0.00411	0.00406		
	8 × 8	0.00403			
0.010	2 × 2	0.00425			
	4 × 4	0.00411	0.00406		
	8 × 8	0.00403			
0.100	2 × 2	0.00463		0.04838	
	4 × 4	0.00429	0.00406	0.04680	0.04632
	8 × 8	0.00424		0.04632	
0.200	2 × 2	0.00498		0.05439	
	4 × 4	0.00482	0.00406	0.05260	0.05217
	8 × 8	0.00477		0.05212	
0.400	2 × 2	0.00720		0.07860	
	4 × 4	0.00695	0.00406	0.07588	0.07557
	8 × 8	0.00687		0.07500	

表 4 四边简支方板的中心弯矩系数(8 × 8 网格)

h/a	0.001	0.010	0.100	0.200	0.300	0.400
$\gamma = M/qa^2$	0.0477	0.0478	0.0484	0.0485	0.0484	0.0484
薄板理论解	$\gamma = 0.0479$					

3.2 用层合板程序计算多层层合板

因任意的多层各向异性层合板缺少作比较的理论解,故仅计算如下一些特例。首先,将前面计算的板看成若干层相同材料的层合板按层合板计算,得到与单层板完全相同的结果,从而验证了层合板计算理论和程序的正确性。然后,计算一块关于中面对称的层合板,这种板可由等效刚度概念来求薄板理论解^[7]。设所计算的板由两种各向同性材料分3层构成,第1层和第3层的厚度都为1,材料弹性常数为 $E_1 = 10^6$, $\mu_1 = 0.3$;第2层(中间层)厚度为8,材料弹性常数为 $E_2 = \lambda E_1$, $\mu_2 = 0.3 = \mu_1$ (图4)。板的尺寸为 100×100 ,均布载荷集度 $q = 1$ 。在四边

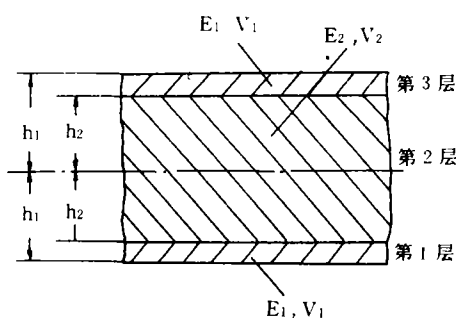


图4 层合板剖面

固支和四边简支两种情形下取若干不同的 λ 值进行计算。而该板的等效弯曲刚度按[7]中的公式为

$$\bar{D} = \frac{2}{3(1 - \mu^2)} [E_1(h_1^3 - h_2^3) + E_2 h_2^3]$$

据此得板的薄板理论解分别为 $\bar{w} = 0.00128 q a^2 / \bar{D}$ (四边固支)和 $\bar{w} = 0.00406 q a^2 / \bar{D}$ (四边简支)。层合板程序的计算结果及与薄板理论解的比较列于表5,表6。

表5 四边固支层合方板的中心挠度($q = 1$)

$\lambda = E_2/E_1$	1.0	0.5	0.1	0
等效刚度 $\bar{D}$	91.5751×10^6	68.1319×10^6	49.3773×10^6	44.6886×10^6
薄板解 $\bar{W}$	0.001398	0.001879	0.002592	0.002864
计算值 w	0.001636	0.002266	0.003390	0.003961
$w/\bar{w}$	1.1704	1.2062	1.3078	1.3829

表6 四边简支层合方板的中心挠度($q = 1$)

$\lambda = E_2/E_1$	1.0	0.5	0.1	0
等效刚度 $\bar{D}$	91.5751×10^6	68.1319×10^6	49.3773×10^6	44.6886×10^6
薄板解 $\bar{W}$	0.004434	0.005959	0.008229	0.009085
计算值 w	0.004650	0.006311	0.008954	0.010095
$w/\bar{w}$	1.0485	1.0590	1.0880	1.1112

从表5,表6看出:当 E_2 与 E_1 相同时(此时即为单层板),固支方板挠度中剪切影响约为薄板解的17%,简支方板则为4.8%;当 E_2/E_1 减小时,剪切影响随之增大,在 $E_2 = 0$ 时固支方板的挠度中剪切影响高达薄板解的38%,简支方板则为11%。固支方板中横向剪切对挠度的影响大大甚于简支方板。这是因为固支板中正弯矩数值较小,因而剪切变形相对而言起了比较重要的作用。以上计算中 $\lambda = 0$ 是假想的极端情形。在 λ 很小时由于沿厚度方向的压缩变形,实际挠度比表中数值更大。

参 考 文 献

- 1 Whitney J M. Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. J Comp Mater, 1972,(10)
- 2 Whitney J M. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. J A M, 1973,(3)
- 3 蔡敏. 多层粘合板弯曲问题的有限元素法. 合肥工业大学学报, 1983,(4)
- 4 贺大绌. 一种考虑剪切变形的矩形板元素刚度矩阵. 固体力学学报, 1981(1)
- 5 Kikuchi F. Theory and examples of partial approximation in the finite element method. Int J Num Meth Eng, 1976, (10)
- 6 谢贻权, 何福保. 弹性和塑性力学中的有限单元法. 机械工业出版社, 1981. 116~117
- 7 列赫尼茨基 C r 著, 胡海昌译. 各向异性板. 科学出版社, 1955. 144~146

A Rectangular Laminate Plate Element Automatically Including Shear Effect

Fan Benjun

(Dept. of Mech. Eng.)

Abstract In this paper a laminate plate element is formulated by means of respeative interpolations for the terms of strain energy expression. This element includes transverse shear deformation, and can automatically reduce to Kirchhoff's assumption while the plate is thin. Furthermore, the element has the advantages of simple constitution and computing time saving.

Key-words Finite element; Rectangular element; Laminate plate; Shear effect

附录

单元应变矩阵(几何矩阵)子矩阵 $[B_i]$

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & -\frac{1}{1+\varphi_1}\frac{z}{a^2}H_0^*(\xi)(1-\eta) & -\frac{z(H_1^{**}(\xi)-\varphi_1)(1-\eta)}{a(1+\varphi_1)} & 0 \\
 0 & -\frac{1}{b}(1-\xi) & -\frac{1}{1+\varphi_2}\frac{z}{b^2}H_0^*(\eta)(1-\xi) & 0 & -\frac{z(H_1^*(\eta)-\varphi_2)(1-\xi)}{b(1+\varphi_2)} \\
 -\frac{1}{b}(1-\xi) & -\frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{z}{b}(1-\xi) & \frac{z}{a}(1-\eta) \\
 0 & 0 & -\frac{\varphi_1}{1+\varphi_1}\frac{1}{a}(1-\eta) & -\frac{\varphi_1}{1+\varphi_1}\frac{1}{2}(1-\eta) & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{\varphi_2}{1+\varphi_2}\frac{1}{b}(1-\xi) & 0 & -\frac{\varphi_2}{1+\varphi_2}\frac{1}{2}(1-\xi)
 \end{bmatrix}$$

子阵 $[B_i]$, $[B_m]$, $[B_n]$ 的各元素可由 $[B_i]$ 的各元素按一定规律代换得到, 不一一列举。