

# 自动考虑剪切变形的轴对称壳单元 及对层合壳计算的应用

范本隽

(机械工程系)

**摘要** 推导了一种中厚壳和薄壳都适用的轴对称壳单元。它假设了独立结点转角,计入了剪切变形,而在薄壳情况下自动符合薄壳理论。以它为基础构造了能自动考虑剪切效应的层合壳单元。

**主题词** 有限元; 壳体结构; 剪力效应 / 轴对称壳; 剪切效应; 层合壳

**中图分类号** TB125

## 0 前 言

轴对称壳是常用的工程结构。有限元法中用位移法建立的轴对称壳单元基本上分为依据薄壳理论和假设独立转角两类,前者不考虑横向剪切效应,故当壳厚增加时误差随之增大;后者考虑了横向剪切变形但在计算薄壳时其位移模式不能自动符合薄壳理论的假设,需采取减缩积分等措施以避免剪切自锁,减缩积分有时可引起虚假的刚体位移。

薄壳与中厚壳之间并无截然的划分,因此,一种既适用于薄壳亦适用于中厚壳的通用单元能给实际应用带来便利。已建立的这种单元有文献[1]的杂交单元。但本文仍用位移法建立一种构造相当简单、对中厚壳直到极薄的壳都有良好的计算精度的轴对称通用壳单元,它假设了独立的结点转角,计入了横向剪切变形的影响,而当剪切刚度与弯曲刚度之比趋于无穷时从位移模式上自动退化到薄壳理论的假设之下,不存在剪切自锁。用这种单元来构造层合壳单元尤其显示出其优点。

## 1 插值函数

### 1.1 考虑剪切变形的直梁的插值函数<sup>[2]</sup>

图1所示的直梁,1,2为其结点, $w_1, w_2$ 为结点挠度, $\psi_1, \psi_2$ 为结点转角。任意截面的无量纲坐标  $\xi = x/l$ , 该截面的挠度和转角用结点值表示为

收稿日期:1994-09-16

$$\begin{aligned} w(\xi) &= G_0^1(\xi)w_1 + lG_1^1(\xi)\psi_1 + G_0^2(\xi)w_2 + lG_1^2(\xi)\psi_2 \\ \psi(\xi) &= \frac{1}{l}J_0^1(\xi)w_1 + J_1^1(\xi)\psi_1 + \frac{1}{l}J_0^2(\xi)w_2 + J_1^2(\xi)\psi_2 \end{aligned} \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} G_0^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^1(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}(1-\xi) \\ G_1^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^1(\xi) + \frac{\varphi}{2(1+\varphi)}(\xi-\xi^2) \\ G_0^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^2(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}\xi \\ G_1^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^2(\xi) - \frac{\varphi}{2(1+\varphi)}(\xi-\xi^2) \\ J_0^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^1(\xi) \\ J_1^1(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^1(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}(1-\xi) \\ J_0^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_0^2(\xi) \\ J_1^2(\xi) &= \frac{1}{1+\varphi}H_1^2(\xi) + \frac{\varphi}{1+\varphi}(\xi) \end{aligned} \quad (2)$$

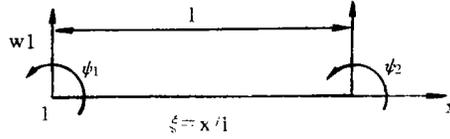


图1 直梁

式中  $\varphi = 12D/Cl^2$ ,  $D$  为弯曲刚度,  $C$  为剪切刚度。 $H_0^1(\xi)$  等为 Hermite 三次多项式:

$$\begin{aligned} H_0^1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & H_1^1(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ H_0^2(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 & H_1^2(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3 \end{aligned} \quad (3)$$

该插值函数满足位移边界条件并使单元变形能最小,而且在  $D/C \rightarrow 0$  时自动退化为无剪切变形的梁。这里顺便指出,文献[2]的推导过程实质上是引入内部自由度并按变形能极小原则将其消去,可证明这与通常对内部自由度使用静凝聚法等效。因此这种插值函数可看成利用了内部自由度的插值函数。

### 1.2 轴对称壳单元的插值函数

设壳单元  $ij$  的子午面如图 2 所示,中面母线线段  $ij$  长为  $l$ 。取  $s$  轴与中面母线重合, $z$  轴为中面法线方向,它与对称轴的夹角记为  $\alpha$ 。结点  $i, j$  在中面内的位移为  $u_i, u_j$ ,垂直于中面的位移(挠度)为  $w_i, w_j$ ,转角为  $\psi_i, \psi_j$ 。结点  $i, j$  到对称轴的距离(半径)为  $R_i^0, R_j^0$ 。

建立局部坐标  $\xi = s/l$ ,将中面上的点  $P^0$  的面内位移、挠度和转角表示为

$$\begin{aligned} u^0 &= (1-\xi)u_i + \xi u_j \\ w^0 &= G_0^1(\xi)w_i + lG_1^1(\xi)\psi_i + G_0^2(\xi)w_j + lG_1^2(\xi)\psi_j \\ \psi^0 &= \frac{1}{l}J_0^1(\xi)w_i + J_1^1(\xi)\psi_i + \frac{1}{l}J_0^2(\xi)w_j + J_1^2(\xi)\psi_j \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \begin{Bmatrix} u^0 \\ w^0 \\ \psi^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & G_0^1 & lG_1^1 & 0 & G_0^2 & lG_1^2 \\ 0 & \frac{1}{l}J_0^1 & J_1^1 & 0 & \frac{1}{l}J_0^2 & J_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \psi_i \\ u_j \\ w_j \\ \psi_j \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (4)$$

该插值函数满足应变能收敛所要求的连续性。

点  $P^0$  到对称轴的距离为

$$R^0 = (1 - \xi)R_1^0 + \xi R_2^0 \quad (5)$$

如壳的厚度沿母线线性变化,则点  $P^0$  处的壳厚取为

$$h = (1 - \xi)h_1 + \xi h_2 \quad (6)$$

## 2 单元刚度矩阵

### 2.1 单元应变

位于通过点  $P^0$  的法线上,坐标为  $(s, z)$  的点  $P$ ,按壳体理论其位移可用点  $P^0$  的位移和转角表示为

$$u = u^0 - z\phi \quad (7)$$

$$\tau w = w^0$$

$P$  点的应变-位移关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_z}{r} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

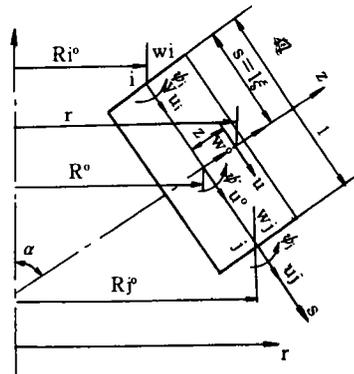


图2 壳单元

由图2可见

$$r = R^0 + z \sin \alpha = (1 - \xi)R_1^0 + \xi R_2^0 + z \sin \alpha \quad (9)$$

$$u_r = u \cos \alpha + w \sin \alpha$$

将(7)、(9)式代入(8)式经运算后得到  $P$  点应变用结点位移表示为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\}_e \quad (10)$$

式中

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & -\frac{J_0^1 z}{l^2} & -\frac{J_1^1 z}{l} \\ \frac{(1 - \xi) \cos \alpha}{r} & \frac{l G_0^1 \sin \alpha - J_0^1 z \cos \alpha}{r l} & \frac{l G_1^1 \sin \alpha - J_1^1 z \cos \alpha}{r} \\ 0 & -\frac{1}{l} \frac{\varphi}{1 + \varphi} & -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{1 + \varphi} \\ \frac{1}{l} & -\frac{J_0^2 z}{l^2} & -\frac{J_1^2 z}{l} \\ \frac{\xi \cos \alpha}{r} & \frac{l G_0^2 \sin \alpha - J_0^2 z \cos \alpha}{r l} & \frac{l G_1^2 \sin \alpha - J_1^2 z \cos \alpha}{r} \\ 0 & \frac{1}{l} \frac{\varphi}{1 + \varphi} & -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{1 + \varphi} \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 2.2 单元刚度矩阵与等效结点力(局部坐标系中)

设材料为正交各向异性,主轴分别与  $s, \theta, z$  轴方向一致,弹性常数为  $E_{11}, E_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}, G_{12}$ , 弹性矩阵为

$$[D] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中  $A_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$   $A_{12} = \frac{E_{11}\mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$   $A_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$   
 则单元刚度矩阵为

$$[K]_e = \int_v [B]^T [D] [B] dV = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l [B]^T [D] [B] 2\pi r ds dz \quad (13)$$

由坐标变换关系  $s = l\xi$ , 并作进一步变换

$$\xi = \frac{1 + \xi'}{2}, \quad z = \frac{h}{2}\zeta' \quad (14)$$

这里  $\xi', \zeta' \in [-1, 1]$ . 于是可利用高斯求积公式计算单元刚度矩阵:

$$[K]_e = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \frac{lh}{4} r d\xi' d\zeta' \\ \approx 2\pi \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} [B(\xi'_p, \zeta'_q)]^T [D] [B(\xi'_p, \zeta'_q)] r(\xi'_p, \zeta'_q) \frac{lh}{4} W_p W_q \quad (15)$$

式中  $N_1, N_2$  为  $s, z$  方向上积分点数,  $W_p, W_q$  为高斯权系数。

设单元上分布载荷为  $\{p\} = [p_s \quad p_z \quad m]^T$ , 经推导得等效结点力计算式为

$$\{p\}_e = 2\pi \sum_{p=1}^{N_1} [N(\xi'_p)]^T \{p\} R^0(\xi'_p) \frac{l}{2} W_p \quad (16)$$

### 2.3 关于高斯积分的阶数

由于在  $s$  方向积分时, 被积函数含有因子  $\frac{1}{r} = \frac{1}{(1 - \xi)R_1^0 + \xi R_2^0 + z \sin \alpha}$ , 高斯积分只能得到积分的近似值。为了估计高斯积分对这类函数的精确程度, 计算了积分  $\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{R^0 + \xi}$ 。当  $R^0 = 10$  时, 2 点高斯积分相对误差为  $2 \times 10^{-4}$ , 3 点高斯积分相对误差为  $2 \times 10^{-8}$ , 4 点高斯积分相对误差小于  $10^{-9}$ 。考虑到当  $\alpha = 0$  且  $R_1^0 = 0$  时 3 点积分格式出现使  $[B]$  中分母  $r$  为零的情形, 故在  $s$  方向取 4 点积分。 $z$  方向则取 3 点或 2 点积分。

### 2.4 关于刚体位移和零能模式

轴对称单元应能反映轴向刚体平移, 本单元具有这样的能力。事实上, 由于  $u_r = w \sin \alpha + u \cos \alpha$ ,  $u_s = w \cos \alpha - u \sin \alpha$  ( $a$  为轴向) 以及插值公式(4), 当给两结点以轴向刚体平移模式  $u_{ri} = u_{rj} = 0$ ,  $u_{si} = u_{sj} = c$ ,  $\psi_i = \psi_j = 0$  时可推出任一点处  $u_r = 0$ ,  $u_s = c$ ,  $\psi = 0$ , 即整个单元作轴向刚体平移。

由于所使用的直梁的插值函数涉及利用内部自由度, 故有必要检查零能模式<sup>[9]</sup>。经计算若干典型单元的特征值, 均只有 1 个零特征值, 这表明除轴向刚体运动外, 单元没有其它零能模式。

## 3 单层壳算例

例 1 各种厚度的筒支与固支圆板, 受均布压力作用。板的中心挠度

$$w = \beta \frac{qR^4}{D}$$

其中  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  为板的弯曲刚度,  $R$  为板的半径。中心挠度系数  $\beta$  的计算值与比较值列于表 1, 表 2。表中  $h$  为厚度,  $n$  为划分单元数目, 薄板理论解和三维弹性解分别引自文献 [3] 和文献 [4]。

表 1 简支圆板的中心挠度系数(均布载荷)

$h/R$	0.001	0.010	0.100	0.200	0.300
计算值 $\beta$ $n=2$	0.0638	0.0638	0.0644	0.0662	0.0693
$n=4$	0.0637	0.0637	0.0643	0.0661	0.0691
$n=8$	0.0637	0.0637	0.0643	0.0661	0.0691
薄板理论解 $\bar{\beta}$	$\bar{\beta} = 0.0637$				
三维弹性解	—	—	—	0.0661	—
SAP5 二维元			0.0647	0.0667	0.0706
$\beta/\bar{\beta}$	1.000	1.000	1.009	1.038	1.085

表 2 固支圆板的中心挠度系数(均布载荷)

$h/R$	0.001	0.010	0.100	0.200	0.300
计算值 $\beta$ $n=2$	0.0157	0.0157	0.0163	0.0181	0.0212
$n=4$	0.0156	0.0156	0.0162	0.0180	0.0210
$n=8$	0.0156	0.0156	0.0162	0.0180	0.0210
薄板理论解 $\bar{\beta}$	$\bar{\beta} = 0.0156$				
三维弹性解	—	—	—	0.0183	—
SAP5 二维元			0.0163	0.0183	0.0217
$\beta/\bar{\beta}$	1.000	1.000	1.038	1.154	1.346

例 2 各种厚度的两端简支及两端固支的圆柱壳, 受均布内压力  $p$  作用(图 3)。为与文献 [6] 的薄壳理论解比较, 这里的“简支”含义为  $w=0$  而对  $u, \psi$  不约束, “固支”含义为  $w=0, \psi=0$  而对  $u$  不约束。这两种情形下, 圆柱壳母线中点挠度的薄壳理论解分别为

$$\bar{w} = \frac{pR^2}{Eh} \left( 1 - \frac{2\cos\alpha ch}{\cos\alpha + ch2\alpha} \right)$$

$$\text{及 } \bar{w} = \frac{pR^2}{Eh} \left( 1 - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha sh}{sh\alpha ch + \sin\alpha \cos\alpha} \right)$$

$$\text{式中 } \alpha = \frac{\beta L}{2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}$$

设  $R=100, L=100, E=10^6, \mu=0.3, p=1$ ,

利用对称性取一半划分为 10 个单元。母线中点  $C$  的挠度的计算值与比较值列于表 3, 表 4。

表 3 两端简支圆柱壳母线中点挠度(法向均布载荷  $p=1$ )

$h$	0.1	1.0	10.0	20.0	30.0
计算值 $w$	$1.000 \times 10^{-1}$	$9.968 \times 10^{-3}$	$1.121 \times 10^{-3}$	$4.749 \times 10^{-4}$	$2.557 \times 10^{-4}$
薄壳解 $\bar{w}$	$1.000 \times 10^{-1}$	$9.968 \times 10^{-3}$	$1.121 \times 10^{-3}$	$4.626 \times 10^{-4}$	$2.334 \times 10^{-4}$

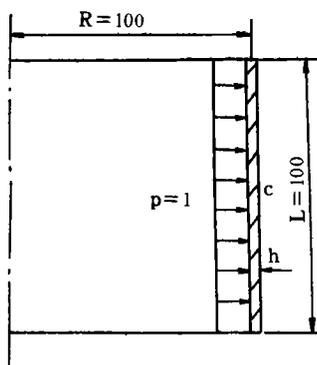


图 3 圆柱壳

续表 3

$h$	0.1	1.0	10.0	20.0	30.0
SAP5 二维元		$9.968 \times 10^{-3}$	$1.117 \times 10^{-3}$	$4.723 \times 10^{-4}$	$2.646 \times 10^{-4}$
$w/\bar{w}$	1.000	1.000	1.000	1.027	1.096

表 4 两端固支圆柱壳母线中点挠度(法向均布载荷  $p = 1$ )

$h$	0.1	1.0	10.0	20.0	30.0
计算值 $w$	$1.000 \times 10^{-1}$	$9.965 \times 10^{-3}$	$8.950 \times 10^{-4}$	$2.848 \times 10^{-4}$	$1.419 \times 10^{-4}$
薄壳解 $\bar{w}$	$1.000 \times 10^{-1}$	$9.963 \times 10^{-3}$	$8.725 \times 10^{-4}$	$2.286 \times 10^{-4}$	$8.453 \times 10^{-5}$
SAP5 二维元		$9.963 \times 10^{-3}$	$8.853 \times 10^{-4}$	$2.870 \times 10^{-4}$	$1.454 \times 10^{-4}$
$w/\bar{w}$	1.000	1.000	1.026	1.246	1.679

从例 1 和例 2 的计算结果可看到本单元具有自动适应壳厚变化的能力,当壳极薄时计算结果与薄壳理论解完全一致,而在中厚壳情形下计算结果与三维理论解及 SAP5 二维元的计算值相吻合。上述计算结果还表明在固支情形下横向剪切变形占总挠度的比例比简支情形下大得多,这是因为固支情形下正弯矩数值比简支情形下小很多,横向剪切变形作用相对而言就比较明显。

例 3 各种厚度的圆锥壳(图 4),边缘受径向线布力  $H = 1$  作用。取  $E = 10^6, \mu = 0$ , 划分单元数  $n = 8$ 。薄壳理论解引自文献[5]。

表 5 圆锥壳边缘径向位移  $E\delta_A$

$h$	2/3	1.0	2.0	4.0	6.0
计算值	431.4	233.7	81.2	27.6	14.3
薄壳理论解	427.0	—	—	—	—
SAP 5 二维元	432.2	234.5	82.1	28.7	15.2

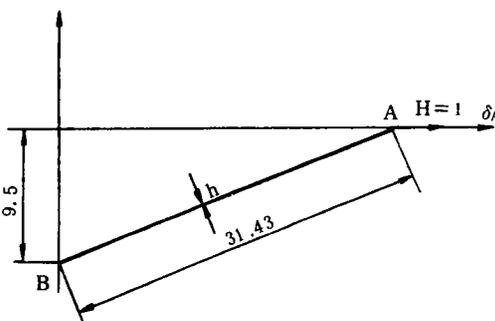


图 4 圆锥壳

例 4 开孔半球壳,受作用于孔边缘的线布集中力偶或水平力的作用(图 5)。曲线离散

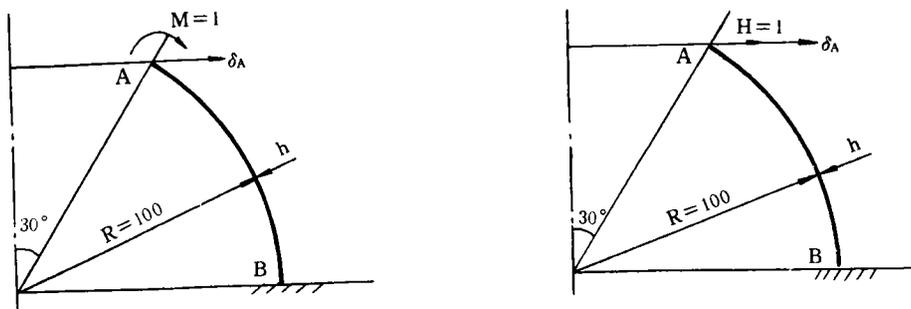


图 5 开孔半球壳

$E = 10^7 \quad \mu = 0.33$

成折线引起的斜率不连续用罚单元处理。薄壳理论解引自文献[7]。



式中  $[D_k]$  为第  $K$  层材料的弹性矩阵。计算时由坐标变换关系  $s = l\xi$  并作进一步变换

$$\begin{cases} \xi = \frac{1 + \xi'}{2} \\ z = \frac{z_k + z_{k-1}}{2} + \frac{z_k - z_{k-1}}{2}\zeta' \end{cases} \quad \xi', \zeta' \in [-1, 1] \quad (18)$$

沿  $z$  方向在每一层中取 2 个高斯积分点,于是局部坐标系中层合壳单元刚度矩阵的最后计算式为

$$[K]_e = 2\pi \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} [B(\xi'_p, \zeta'_q)]^T [D_k] [B(\xi'_p, \zeta'_q)] r(\xi'_p, \zeta'_q) \frac{l}{4} (z_k - z_{k-1}) W_p W_q \quad (19)$$

从总体平衡方程解出结点位移后可在局部坐标系中计算各层承担的内力

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ Q_{sz} \end{Bmatrix}_k = [D_k] \frac{\int_{z_{k-1}}^{z_k} [B] r dz}{r} \{\delta\}_e = [D_k] [S_k] \{\delta\}_e \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix}_k = [D'_k] \frac{\int_{z_{k-1}}^{z_k} [B] r dz}{r} \{\delta\}_e = [D'_k] [S'_k] \{\delta\}_e \quad (21)$$

式中  $[D'_k] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,  $[S_k] = \frac{\int_{z_{k-1}}^{z_k} [B] r dz}{r}$ ,  $[S'_k] = \frac{\int_{z_{k-1}}^{z_k} [B] r z dz}{r}$

### 5 层合壳算例

首先将例 1, 例 2 所计算的单层壳想象成由若干层相同材料组成的层合壳。用层合壳程序计算,结果与按单层壳计算的相同,以此检验了层合壳计算理论和程序的正确性。然后计算以下例题。

例 5 周边固支的层合圆板,受法向均布载荷  $q = 1$  或中心集中力  $P = 1$  作用。板以中面为对称面,由两种材料分 3 层构成(图 7)。

第 1 层和第 3 层的厚度都为 1,材料弹性常数为  $E_1 = 10^6, \mu_1 = 0.3$ ;第 2 层(中间层)厚为 8,材料弹性常数为  $E_2 = \lambda E_1, \mu_2 = 0.3 = \mu_1$ 。板的半径为  $R$ 。这种特殊的层合板可用等效刚度概念来求薄板理论解。其等效弯曲刚度公式为<sup>[8]</sup>

$$\bar{D} = \frac{2}{3(1 - \mu^2)} [E_1(h_1^3 - h_2^3) + E_2 h_2^3]$$

据此得板的中心挠度的薄板理论解为  $\bar{w} = \frac{qR^4}{64\bar{D}}$  (均布力作用) 及  $\bar{w} = \frac{PR^2}{16\pi\bar{D}}$  (集中力作用)。

对于  $R = 100$  和  $R = 50$  两种情形,每种情形下  $\lambda = 1.0$  和  $\lambda = 0.5$  时的中心挠度计算值与比较值列于表 8,表 9。

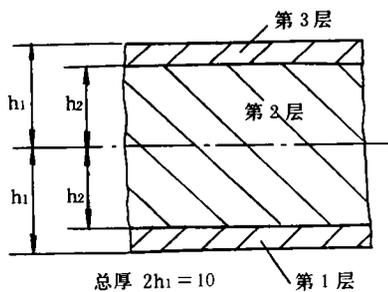


图 7 层合圆板剖面

表8 固支层合圆板在均布力  $q = 1$  作用下的中心挠度 ( $n = 10$ )

	$R = 100.0$		$R = 50.0$	
	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.5$
等效刚度 $\bar{D}$	$91.5751 \times 10^6$	$68.1319 \times 10^6$	$91.5751 \times 10^6$	$68.1319 \times 10^6$
计算值 $w$	$1.7683 \times 10^{-2}$	$2.3976 \times 10^{-2}$	$1.2274 \times 10^{-3}$	$1.7024 \times 10^{-3}$
薄板解 $\bar{w}$	$1.7062 \times 10^{-2}$	$2.2933 \times 10^{-2}$	$1.0664 \times 10^{-3}$	$1.4333 \times 10^{-3}$
SAP5 二维元	$1.7710 \times 10^{-2}$	$2.4199 \times 10^{-2}$	$1.2485 \times 10^{-3}$	$1.7768 \times 10^{-3}$
$w/\bar{w}$	1.037	1.045	1.153	1.188

表9 固支层合圆板在集中力  $p = 1$  作用下的中心挠度

	$R = 100.0$		$R = 50.0$	
	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.5$
等效刚度 $\bar{D}$	$91.5751 \times 10^6$	$68.1319 \times 10^6$	$91.5751 \times 10^6$	$68.1319 \times 10^6$
计算值 $w$	$2.3334 \times 10^{-6}$	$3.1919 \times 10^{-6}$	$7.1466 \times 10^{-7}$	$1.0170 \times 10^{-6}$
薄板解 $\bar{w}$	$2.1725 \times 10^{-6}$	$2.9200 \times 10^{-6}$	$5.4313 \times 10^{-7}$	$7.3000 \times 10^{-7}$
SAP5 二维元	$2.3912 \times 10^{-6}$	$3.3337 \times 10^{-6}$	$7.1911 \times 10^{-7}$	$1.0551 \times 10^{-6}$
$w/\bar{w}$	1.074	1.093	1.316	1.393

例6 两端固支的层合圆柱壳,受均向均布力  $p = 1$  作用。圆柱壳尺寸同例2,剖面构造及尺寸同例5。母线中点挠度计算值列于表10。

表10 固支层合圆柱壳在均布力  $p$  作用下的最大挠度 ( $n = 10$ )

$\lambda$	1.0	0.5	0.1
计算值 $w$	$8.9496 \times 10^{-4}$	$1.4117 \times 10^{-3}$	$2.6475 \times 10^{-3}$
薄壳解 $\bar{w}$	$8.7254 \times 10^{-4}$	—	—
SAP5 二维元	$8.9668 \times 10^{-4}$	$1.4225 \times 10^{-3}$	$2.8878 \times 10^{-3}$

## 6 结 语

1) 自动考虑剪切变形的轴对称壳单元适用于从极薄的壳直到中厚壳,在不计沿厚度方向压缩变形前提下可作为一种通用壳单元。

2) 在此单元基础上构造的轴对称层合壳单元使对层壳有较大影响的横向剪切变形自动地被考虑,其实现过程比杂交元简明。

### 参 考 文 献

- 1 任永坚,丁浩江. 一类新型的杂交轴对称壳单元. 华东计算力学论文选集. 复旦大学出版社,1990
- 2 贺大铤. 一种考虑剪切变形的矩形板元素刚度矩阵. 固体力学学报, 1981, 1
- 3 徐芝纶编. 弹性力学,下册. 人民教育出版社,1979
- 4 孙全新,罗祖道. 圆板弯曲的三维弹性理论解. 上海力学,1983, :27
- 5 Flugge W. Stress in Shells. Springer Verlag,1976

- 6 S. 铁摩辛柯, S. 沃诺斯基. 板壳理论. 科学出版社, 1977. 509~511
- 7 Zienkiewicz O C. The Finite Element Method. McGraw-Hill. 1977. 361~363
- 8 列赫尼茨基 C. r. 胡海昌译. 各向异性板. 科学出版社, 1955. 144~148
- 9 库克 R D. 有限元分析的概念和应用. 科学出版社, 1981. 149~150

## **An Axisymmetric Shell Element Automatically Including Shear Deformation and it's Application to Laminate Shell Calculating**

Fan Benjun

(Dept. of Mech. Eng.)

**Abstract** An axisymmetric shell element for both mid-thick and thin shells are presented. Independent nodal rotations are assumed and transverse deformation is included. The element is automatically suited to thin-shell theory in the thin shell case. Based on it, an element for laminate shells including shear effect is derived.

**Subject-words** Finite element; Shell structures; Shear effect / Axisymmetric shell; Shear effect; Laminate shell