第 14 卷 第 1 期
无锡轻工大学学报
JOURNAL OF WUXI UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY
Vol. 14 1995 No. 1

理想减色体系等量减法混色的原理

范雪荣 余震虹

（纺织工程系）

摘要 根据光度学和色度学理论探讨了理想减色体系等量减法混色原理和原色的选择。

主题词 配色；三刺激值；颜色

中图分类号 TS193.14

0 引 言

颜色混合有加法混色和减法混色，加法混色的刺激值与原色刺激值有简单线性关系，减法混色虽然有文献进行了一些讨论[1~3]，但困难是减法混色的刺激值是一复杂的积分形式，目前减法混色的色调、纯度和明度尚无定量计算公式。本文在理想减色体系等量减法混色的条件下，对减法混色的三刺激值与照射光三刺激值的关系、色调（主波长）、纯度和明度的计算以及减法混色的原色选择从理论上进行了分析探讨。

1 理想减色体系等量减法混色原理证明

颜色三刺激值 X,Y,Z 的标准方程为：$X=k\int\varphi(\lambda)\bar{x}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，$Y=k\int\varphi(\lambda)\bar{y}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，$Z=k\int\varphi(\lambda)\bar{z}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，其中 $\bar{x}(\lambda)$、$\bar{y}(\lambda)$、$\bar{z}(\lambda)$ 是 CIE 1931 标准色度观察者光谱三刺激值，$\varphi(\lambda)$ 为颜色刺激函数，对照明体或光源来说，$\varphi(\lambda)$ 是它们的相对光谱功率分布 $S(\lambda)$，对物体色来说，$\varphi(\lambda)$ 是 $S(\lambda)$ 与物体的光谱透过率 $\tau(\lambda)$ 或光谱反射率 $\beta(\lambda)$ 之积：$\varphi(\lambda)=\tau(\lambda)S(\lambda)$ 或 $\varphi(\lambda)=\beta(\lambda)S(\lambda)$. 常数 k 是调整因数，它是将照明体或光源的 Y 值调整为 100 时得出的，$k=100/\int S(\lambda)\bar{y}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，，当 $\varphi(\lambda)=\tau(\lambda)S(\lambda)$ 时，Y 为物体的光的总透射率，当 $\varphi(\lambda)=\beta(\lambda)S(\lambda)$ 时，Y 为物体的光的总反射率。由于 $\bar{y}(\lambda)$ 相当于明视觉光谱光效率函数 $V(\lambda)$，所以 Y 表示了颜色的明度。颜色的色度坐标 x,y,z 与刺激值的关系为：

$$x=\frac{X}{X+Y+Z},\quad y=\frac{Y}{X+Y+Z},\quad z=\frac{Z}{X+Y+Z}$$

收稿日期：1994-04-05

设一相对光谱功率分布为 $S(\lambda)$,三刺激值为 $X_{光}$,$Y_{光}$,$Z_{光}$ 的光通过一单位厚度、含有单位浓度理想有色物质的 n 种有色物体,如图 1 所示。假定理想有色物体对光无反射,只有吸

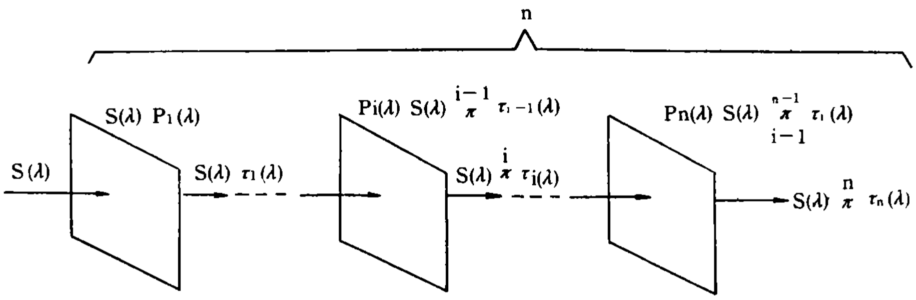

图 1 理想减色体系等量减法混色示意图

收和透射,其吸光率为 $\rho(\lambda)$,透光率为 $\tau(\lambda)$,显然当 $n=1$ 时,$\rho_1(\lambda)+\tau_1(\lambda)=1$

$$S(\lambda)=S(\lambda)\rho_1(\lambda)+S(\lambda)\tau_1(\lambda) \tag{1}$$

$$\begin{cases} X_{光}=k\int S(\lambda)\bar{x}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=k\int S(\lambda)\rho_1(\lambda)\bar{x}(\lambda)\mathrm{d}\lambda+k\int S(\lambda)\tau_1(\lambda)\bar{x}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=X_{吸}+X_{透} \\ Y_{光}=k\int S(\lambda)\bar{y}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=k\int S(\lambda)\rho_1(\lambda)\bar{y}(\lambda)\mathrm{d}\lambda+k\int S(\lambda)\tau_1(\lambda)\bar{y}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=Y_{吸}+Y_{透} \\ Z_{光}=k\int S(\lambda)\bar{z}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=k\int S(\lambda)\rho_1(\lambda)\bar{z}(\lambda)\mathrm{d}\lambda+k\int S(\lambda)\tau_1(\lambda)\bar{z}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=Z_{吸}+Z_{透} \end{cases} \tag{2}$$

$n=2$ 时,$\rho(\lambda)$ 与 $\tau(\lambda)$ 之间显然也有 $\rho_1(\lambda)+\tau_1(\lambda)=1$,$\rho_2(\lambda)+\tau_2(\lambda)=1$ (3)

可证明如下

$$S(\lambda)=\rho_1(\lambda)S(\lambda)+\tau_1(\lambda)S(\lambda) \qquad 则\ \rho_1(\lambda)+\tau_1(\lambda)=1$$

$$S(\lambda)\tau_1(\lambda)=S(\lambda)\rho_2(\lambda)\tau_1(\lambda)+S(\lambda)\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda) \qquad 则\ \rho_2(\lambda)+\tau_2(\lambda)=1$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad S(\lambda) &= S(\lambda)\rho_1(\lambda)+S(\lambda)\rho_2(\lambda)\tau_1(\lambda)+S(\lambda)\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda) \\ &= S(\lambda)\rho_1(\lambda)+S(\lambda)\rho_2(\lambda)[1-\rho_1(\lambda)]+S(\lambda)\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda) \\ &= S(\lambda)\rho_1(\lambda)+S(\lambda)\rho_2(\lambda)-S(\lambda)\rho_1(\lambda)\rho_2(\lambda)+S(\lambda)\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda) \\ &= S(\lambda)\rho_1(\lambda)+S(\lambda)\rho_2(\lambda)-S(\lambda)[1-\tau_1(\lambda)][1-\tau_2(\lambda)]+S(\lambda)\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda) \\ &= S(\lambda)\rho_1(\lambda)+S(\lambda)\rho_2(\lambda)-S(\lambda)+S(\lambda)\tau_1(\lambda)+S(\lambda)\tau_2(\lambda) \\ &\quad -S(\lambda)\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda)+S(\lambda)\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda) \end{aligned}$$

故 $2S(\lambda)=S(\lambda)\rho_1(\lambda)+S(\lambda)\rho_2(\lambda)+S(\lambda)\tau_1(\lambda)+S(\lambda)\tau_2(\lambda)$

积分后,有 $2X_{光}=X_{1吸}+X_{2吸}+X_{1透}+X_{2透}=X_{吸}+X_{透}$

同理 $2Y_{光}=Y_{1吸}+Y_{1透}+Y_{2吸}+Y_{2透}=Y_{吸}+Y$ 透

$2Z_{光}=Z_{1吸}+Z_{1透}+Z_{2吸}+Z_{2透}=Z_{吸}+Z_{透}$

故有

$$\begin{cases} X_{光}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X_{i吸}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X_{i透} \\ Y_{光}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}Y_{i吸}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}Y_{i透} \\ Z_{光}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}Z_{i吸}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}Z_{i透} \end{cases} \tag{4}$$

对于 n 的情况，有 $\rho_i(\lambda)+\tau_i(\lambda)=1 \quad (i=1,2,\cdots n)$ 　　假定 $n=k$ 时，有

$$kS(\lambda)=\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\rho_i(\lambda)+\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\tau_i(\lambda) \tag{5}$$

当　$n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}S(\lambda)&=\Big[\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\rho_i(\lambda)+\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\tau_i(\lambda)-(k-1)S(\lambda)\Big]\big[\rho_{k+1}(\lambda)+\tau_{k+1}(\lambda)\big]\\&=\Big[\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\rho_i(\lambda)\Big]\rho_{k+1}(\lambda)+\Big[\sum_{i=1}^{k}\rho_i(\lambda)S(\lambda)\Big]\tau_{k+1}(\lambda)\\&\quad+\Big[\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\tau_i(\lambda)\Big]\rho_{k+1}(\lambda)+\Big[\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\tau_i(\lambda)\Big]\tau_{k+1}(\lambda)-kS(\lambda)\rho_{k+1}(\lambda)\\&\quad-kS(\lambda)\tau_{k+1}(\lambda)+S(\lambda)\rho_{k+1}(\lambda)+S(\lambda)\tau_{k+1}(\lambda)\\&=\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\rho_i(\lambda)+\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\tau_i(\lambda)+S(\lambda)\rho_{k+1}(\lambda)+S(\lambda)\tau_{k+1}(\lambda)-kS(\lambda)\\&=\sum_{i=1}^{k+1}S(\lambda)\rho_i(\lambda)+\sum_{i=1}^{k+1}S(\lambda)\tau_i(\lambda)-kS(\lambda)\end{aligned} \tag{6}$$

即

$$(k+1)S(\lambda)=\sum_{i=1}^{k+1}S(\lambda)\rho_i(\lambda)+\sum_{i=1}^{k+1}S(\lambda)\tau_i(\lambda) \tag{7}$$

$$S(\lambda)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}S(\lambda)\rho_i(\lambda)+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}S(\lambda)\tau_i(\lambda) \tag{8}$$

将式(8)积分后有

$$\begin{cases}X_{光}=\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}X_{i吸}+\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}X_{i透}\\Y_{光}=\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}Y_{i吸}+\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}Y_{i透}\\Z_{光}=\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}Z_{i吸}+\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}Z_{i透}\end{cases} \tag{9}$$

即

$$\begin{cases}X_{光}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_{i吸}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_{i透}=\overline{X}_{i吸}+\overline{X}_{i透}\\Y_{光}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Y_{i吸}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Y_{i透}=\overline{Y}_{i吸}+\overline{Y}_{i透}\\Z_{光}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Z_{i吸}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Z_{i透}=\overline{Z}_{i吸}+\overline{Z}_{i透}\end{cases} \tag{10}$$

由上述推导得出结论之一：当光连续通过 n 个理想有色物体后，光的刺激值一部分被有色物体吸收，一部分通过有色物体透射出，吸收的刺激值是各理想有色物体单独吸收刺激值的平均值，透过的刺激值是各理想有色物体单独透过刺激值的平均值。

2 理想减色体系等量减法混色的明度、色调和纯度的计算

2.1 等量减法混色的明度计算

$$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{i透}=Y_{光}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{i吸}=Y_{光}-\overline{Y}_{i吸} \tag{11}$$

由式(11)可以看出，当 $Y_{光}$ 一定时，产生的颜色的明度与光通过的有色物体的吸收或透

过特性有关,即取决于 n 种有色物体的吸收刺激值 $Y_{i吸}$ 的平均值,而与有色 物体的种数无直接的关系,这是结论之二。

2.2 等量减法混色的色度坐标计算

设光源为国际标准 C 光源,将式(10)与式(12)相比较

$$\begin{cases} X_{光} = X_{总吸} + X_{总透} \\ Y_{光} = Y_{总吸} + Y_{总透} \\ Z_{光} = Z_{总吸} + Z_{总透} \end{cases} \tag{12}$$

有

$$\begin{cases} X_{总吸} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i吸} \\ Y_{总吸} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i吸} \\ Z_{总吸} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{i吸} \end{cases} \tag{13}$$

和

$$\begin{cases} X = X_{总透} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i透} = X_{光} - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i吸} = X_{光} - X_{总吸} \\ Y = Y_{总透} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i透} = Y_{光} - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i吸} = Y_{光} - Y_{总吸} \\ Z = Z_{总透} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{i透} = Z_{光} - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{i吸} = Z_{光} - Z_{总吸} \end{cases} \tag{14}$$

式(14) 中 X,Y,Z 为等量减法混色的三刺激值。

由式(13) 可见,每一有色物体吸收的颜色刺激值,虽然出现了 $1/n$ 因子,但是 X,Y,Z 同时出现了同一因子,故不影响每一有色物体所吸收的每一颜色的色度坐标,即光连续通过 n 个有色物体被每一有色物体吸收的颜色的色度坐标与光分别单独通过 n 个有色物体被每一有色物体吸收的颜色的色度坐标相同,所吸收的颜色的总刺激值 $X_{总吸},Y_{总吸},Z_{总吸}$ 符合颜色相加定律,差别仅在于 $X_{总吸},Y_{总吸},Z_{总吸}$ 为每一有色物体所吸收的颜色刺激值的平均值,这样就可以计算总吸收的颜色的色度坐标。

同理,由式(14) 可见,光连续通过 n 个有色物体后产生的颜色的色度坐标与分别通过 n 个有色物体所产生的颜色之和的色度坐标相同,即色调和纯度相同,仅是明度不同。所透过的颜色光的总刺激值 $X_{总透},Y_{总透},Z_{总透}$(即减法混色的颜色三刺激值) 也符合颜色相加定律,为每一有色物体所透过的颜色光刺激值的平均值,这样也能把减法混色的色度坐标计算出来。

图 2 是 CIE1931 色度图,C 为 C 光源的色度坐标,A 为总吸收色光的色度坐标,B 为总透过色光的色度坐标。显然,B 点必在 A 点与 C 点连线的向外延长线上,它们之间应为

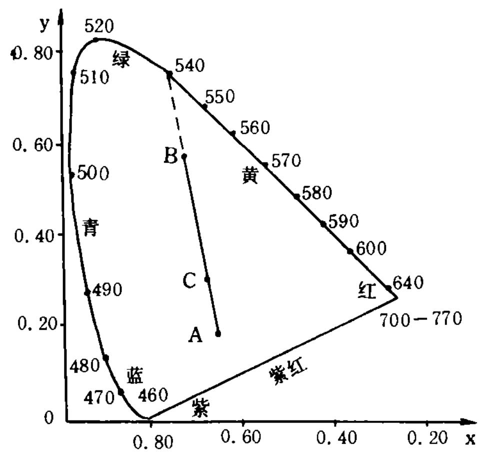

图 2 等量减法混色的纯度和色调

互补关系，B 点在连线上的位置仍符合重力中心定律：

$$\frac{BC}{AC}=\frac{X_{总吸}+Y_{总吸}+Z_{总吸}}{X_{总透}+Y_{总透}+Z_{总透}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_{i吸}+\sum_{i=1}^{n}Y_{i吸}+\sum_{i=1}^{n}Z_{i吸}\right)}{(X_{光}+Y_{光}+Z_{光})-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_{i吸}+\sum_{i=1}^{n}Y_{i吸}+\sum_{i=1}^{n}Z_{i吸}\right)}=\frac{\frac{1}{n}C_{总吸}}{C_{光}-\frac{1}{n}C_{总吸}} \tag{15}$$

式中 C 为色度量(颜色三刺激值之和)，因此 B 点的位置除可根据各有色物体透过的颜色光的三刺激值根据加法定律计算确定外，也可以按式(15) 通过重力中心定律根据光源的色度量和被吸收光的总色度量计算。

2.3 等量减法混色的色调

在图 2 中，将 BC 从 B 点向外延长至与光谱轨迹相交，交点的光谱轨迹波长就是减法混色产生的颜色的主波长，这一主波长的颜色就是减法混色颜色的色调。

2.4 等量减法混色的兴奋纯度计算

B 点与光谱轨迹上同一主波长光谱色靠近的程度表示该颜色的兴奋纯度，因此等量减法混色颜色的兴奋纯度 Pe 为：

$$Pe=\frac{CB}{CL}=\frac{CB}{BL+CB} \tag{16}$$

对于一定的光源来说，$C_{光}$ 是一定的，即 CL 是一定的，因此吸收颜色的总色度量 $C_{总吸}$ 越大，CB/AC 的比值增大，A 点与 C 点的距离缩小，而 B 点与 C 点的距离增大，兴奋纯度增加，也就是说吸收颜色的总色度量越大，透射或反射的颜色光的纯度越高，这是结论之三。

3 等量减法混色原色的选择

在 CIE1931 色度图中，光谱轨迹以内的颜色包含了物理上所有能实现的颜色，在加法混色中，原色是由有色的发光体产生的，通常选用红、绿、蓝为三原色，这三种原色在色度图中所构成的三角形具有较大的面积，如图 3 三角形 RGB 所示，能得到较大的拼色范围，同时也使三角形的边尽量靠近光谱轨迹，以增强拼色的纯度。在减法混色中，原色的产生是通过对光源的吸收而完成的，产生的途径有两种：一种是通过吸收原色的补色而产生；另一种是完全吸收其它光谱段的光线而产生。若在减法混色中选用红、绿、蓝作为三原色，则绿色不能通过吸收其补色而得到，只能通过完全吸收其它光谱段的光线来得到，即绿色的 $Y_{i吸}$ 很大，明度很低，特别是由于把光源中除绿波段外的其它所有光波段都吸收而不能得到其它颜色，所以减法混色不能使用绿原色，而通常选择品红、黄、青作为三原色，可以分别对其补色绿、蓝、红的吸收得到。用这三种原色拼色比用其它三原色得到的颜色范围广，但也存在明显不足。从图 3 可以看出，品红、黄、青三原色的拼色范围比加法混色中红、绿、蓝三原色的拼色范围小得多，只能拼得三角形 ADF 范围内的颜色，而且三角形的三边远离光谱轨迹，所以拼得的颜色纯度也相应差一些。

减法混色中的原色应根据不同需要作不同选择，在选择时应注意以下几点：要求选择的原色所吸收的光谱段尽可能小，即 $Y_{i吸}$ 的值尽可能小，最好仅吸收其补色，否则将影响明度；在CIE 色度图中所用原色色度点的连线应尽量靠近光谱轨迹，以保证有较大的拼色范围，并

能得到较高纯度的颜色;所选择的三原色中任何一种原色不能用其它两种原色拼色得到,因为这样,这三种原色的色度点在一条直线上,改变它们的比例只能得到这条直线上的颜色,得不到这条直线以外的颜色,如图 4 所示。要得到色调在品红 - 红 - 黄范围内的颜色,应以

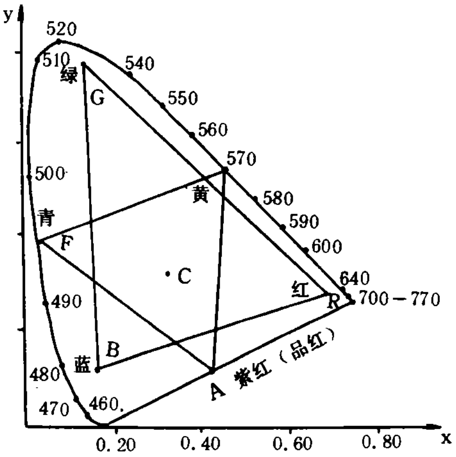

图 3　三原色的拼色范围

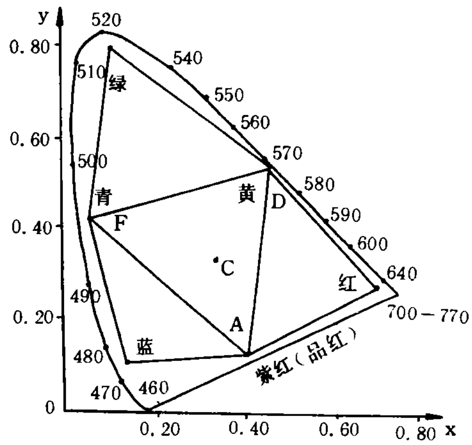

图 4　等量减法混色原色的选择

黄、红、品红为三原色,色调在品红 - 蓝 - 青范围内的颜色应以青、蓝、品红为三原色,色调在青 - 绿 - 黄范围内的颜色应以青和黄为原色,三角形 *ADF* 范围内的颜色应用青、黄 、品红为三原色。

4 结　　论

1)　光连续通过 n 个理想有色物体产生的颜色与它分别通过这 n 个理想有色物体产生的颜色之和的色度坐标相同,它们的色调和纯度相同,仅是明度不同。

2)　理想等量减法混色也符合加法混色定律,只是被有色物体吸收的颜色总三刺激值与透射的颜色总三刺激值之和等于照射光的三刺激值,理想等量减法混色颜色的刺激值是光分别单独通过各理想有色物体产生的颜色刺激值的平均值。

3)　理想等量减法混色颜色的明度与所用理想有色物体种类多少无直接关系,而与理想有色物体的吸收特性有关。

4)　理想有色物体拼色后颜色的色调、纯度可通过 CIE 色度图预测,色调、纯度和明度也可从理论上计算。

5)　用品红、黄、青作理想等量减法混色的三原色有较大局限性。

参 考 文 献

1 荆其诚等. 色度学. 科学出版社,1979
2 束越新. 颜色光学基础理论. 山东科学技术出版社,1981
3 李质和等. 染色织物上的染料浓度与刺激度的关系. 纺织学报,1990,1:8~10

A Theoretical Investigation on the Principle of Equal-Quantity Substrative Colour Mixture in Ideal Substractive Colour System

Fan Xuerong Yu Zhenhong
(Dept. of Textile Eng.)

Abstract The principle of equal-quantity substractive colour mixture in ideal substractive colour system is investigated in this article, and the selection method of primitive colours is also discussed based on theory of photometry and chromatics.

Subject-words Colour combination; Tristimulus value; Colour