

用线切割机床加工椭圆齿轮的编程方法

周一届

(机械工程系)

摘要 介绍了在数控线切割机床上加工椭圆齿轮时,齿的位置和齿形的确定方法。提出了用线切割加工椭圆齿轮时用非标准模数优于用标准模数的观点。

主题词 椭圆齿轮;线切割;模数

中图分类号 TH132.424

0 前言

椭圆齿轮的加工可用数控非圆齿轮加工机床加工,或用模数片铣刀在普通卧式铣床上加工。前者加工精确,但专用设备费用多,后者可达到一定的精度,但加工调整麻烦并且也需要专用装置。资料[1]介绍用数控线切割机床加工非圆齿轮的方法,但不够详细,实际上操作者能在线切割机床上根据所用的编程系统对椭圆齿轮进行编程的情况不多。

APC 自动编程系统有现成的椭圆齿轮程序供操作者使用,本文介绍了在编制椭圆齿轮程序时对一些问题的解决方法,这些方法也可在其它各种编程系统上编出切割椭圆齿轮的程序。

用线切割加工椭圆齿轮或其它非圆齿轮,不用具有标准模数的刀具。也就是说它可以加工任意模数的齿轮。采用非标准模数,与传统的观念相悖,但只要一对共轭齿轮的模数相同,如加工不成问题,则椭圆齿轮的设计会更方便。

1 椭圆齿轮齿形的近似

非圆齿轮的齿形随着轮齿所处的节曲线位置不同而不同。根据[1]介绍,非圆齿轮的齿形可近似用当量齿数的圆柱齿轮的齿形来代替,用线切割加工时,可将当量齿形用圆弧逼近。

图1为当量齿形的示意图。若椭圆齿轮节曲线上 P_j 点是第 j 个轮齿的中点,该点处节曲线的曲率半径为 ρ_j ,则该齿的齿形近似于半径为 ρ_j 的圆柱齿轮的齿形,其当量齿数为 $Z_j = 2\rho_j/m$ (m 为模数)。

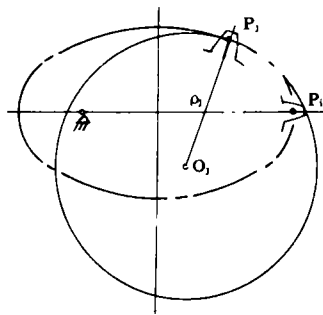


图1 齿形的近似

收稿日期:1994-12-11

2 齿中点和对应的当量参数的确定

设椭圆齿轮第一个齿的中点 P_1 位于长轴上如图 1, 图 2, 从 P_1 到 P_j 的节曲线弧长应为 $S_j = \overline{P_1 P_j} = (j-1)\pi m$, 这是确定 P_j 点位置的依据。

2.1 P_j 点的确定

图 2 所示为椭圆节曲线, 以参变量 φ 表示的椭圆节曲线方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

式中 a 为椭圆的长半径; b 为椭圆的短半径。

设第 j 个齿中点 P_j 对应的参量为 φ_j , 若知道 φ_j 值, 也就能确定 P_j 的位置及其当量参数, φ_j 值可由弧长 S_j 经计算而得。

根据弧的微分可得弧长 S 为

$$S = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (2)$$

式中 e 为椭圆的偏心率, $e = c/a$; C 为椭圆中心到焦点的距离;

$C = \sqrt{a^2 - b^2}$. 从 P_1 到 P_j 弧长 S_j 可表为

$$S_j = a \int_0^{\varphi_j} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (3)$$

式(3)作变换

$$S_j = a \int_{-1}^1 \sqrt{1 - e^2 \cos^2(\varphi_j/2 + \varphi_i/2) \cdot (\varphi_i/2)} dt \quad (4)$$

或

$$S_j = a(\varphi_j/2) \int_{-1}^1 f(t) dt \quad (5)$$

根据高斯-勒让德求积公式

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n \omega_i f(t_i) + R(\eta) \quad (-1 < \eta < 1) \quad (6)$$

取结点数 $n = 5$, 忽略余项 $R(\eta)$, 可得

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=1}^5 \omega_i f(t_i) \quad (7)$$

系数的值可按表 1 取。编程时, 可用一子程序计算对应于参量 φ 的弧长 S

$$S = (a\varphi/2) \cdot \sum_{i=1}^5 \omega_i \sqrt{1 - e^2 \cos^2((\varphi/2)t_i + \varphi/2)} \quad (8)$$

在 P_j 点, 因为已知 $S_j = (j-1)\pi m$, 因此可以从 P_{j-1} 点出发以某种方式选择 φ , 使其不断逼近 φ_j , 在规定一误差值 σ , 使 $|S_j - S| \leq \sigma$ (9)

时, S 对应的 φ 即为所求的 φ_j . σ 值可以按编程者的意图或所割齿轮的精度要求而定 (APC 系统中 $\sigma = 2\mu\text{m}$), 并且对于每个 P_j , 其 S_j 都是从 P_1 开始计算的, 所以误差不会积累。

逼近时步长 θ 的确定可用如下方法

$$\theta = (S_j - S)/\rho \quad (10)$$

式中 S, ρ 分别为对应于 φ 的弧长和曲率半径。逼近方法用图 3 框图表示。求出 φ_j 后再由式(1)求得 $P_j(x_j, y_j)$

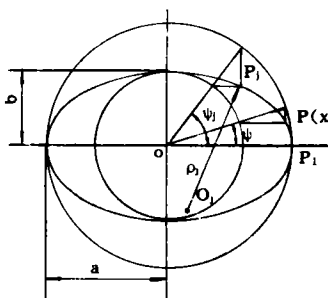


图 2 椭圆节曲线

表 1 结点数 5 时高斯公式的系数

$\omega_1 = 0.5688889$	$t_1 = 0$
$\omega_2 = 0.4786287$	$t_2 = 0.5384693$
$\omega_3 = \omega_2$	$t_3 = -t_2$
$\omega_4 = 0.2369269$	$t_4 = 0.9061799$
$\omega_5 = \omega_4$	$t_5 = -t_4$

2.2 其它参数的确定

1) 当量节圆半径 r_j

$$r_j = \rho_j = \frac{[a^2 \sin^2 \varphi_j + b^2 \cos^2 \varphi_j]^{3/2}}{ab} \tag{11}$$

2) 曲率中心 $O_j(\xi_j, \eta_j)$

$$\begin{cases} \xi_j = (1/a)(a^2 - b^2)\cos^3 \varphi_j \\ \eta_j = (1/b)(a^2 - b^2)\sin^3 \varphi_j \end{cases} \tag{12}$$

3) 当量基圆半径 r_{jb} 、齿顶圆半径 r_{ja} 和齿根圆半径 r_{jf} 取齿顶高系数为 1, 齿根高系数为 1.25, 分度圆上压力角为 20° , 可得 $r_{jb} = r_j \cdot \cos 20^\circ$; $r_{ja} = r_j + m$; $r_{jf} = r_j - 1.25m$.

齿根圆 r_{jf} 是第 j 齿和第 $j + 1$ 齿之间的齿根圆。

3 齿廓的确定

在各项参数求出后, 问题就变为求圆柱齿轮齿廓了。各种编程系统对此有自己的处理方法, 本文介绍的是 APC 自动编程系统的方法。此方法先求出单侧渐开线齿廓上若干个点用圆弧来拟合, 然后用对称语句求得另一侧齿廓。

3.1 起始极径位置的确定

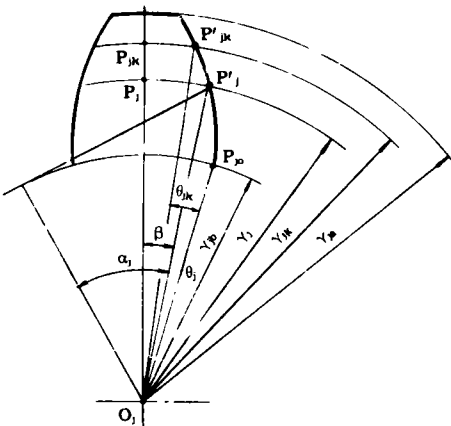


图 4 齿廓的确定

3.2 齿廓上点 P'_{jk} 的选定

考虑了齿廓由圆弧拟合, 选点时注意了点分布, 方法是先确定点 P'_{jk} 所在的半径, 在

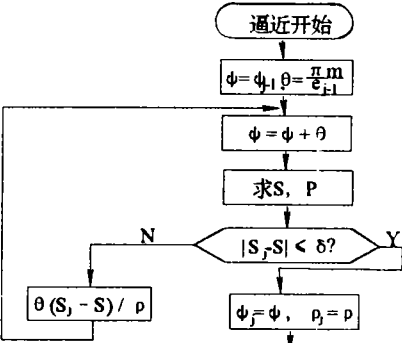


图 3 r_j 的逼近

$$\text{渐开线方程} \begin{cases} \theta_k = \text{tg} \alpha_k - \alpha_k \\ r_k = r_b / \cos \alpha_k \end{cases} \tag{13}$$

中的转角 θ_k 是从原始极径开始的, 确定齿廓上各点必须先确定原始极径的位置。

如图 4 所示, 原始极径为 O_1P_j, P'_j , 为齿廓在分度圆上的点, 其展角为 θ_j , 压力角为 $\alpha_j = 20^\circ = \pi/9$. 根据渐开线方程有

$$\theta_j = \text{tg} \alpha_j - \alpha_j = \text{tg}(\pi/9) - \pi/9 \tag{14}$$

设 P_j, P'_j 所对的圆心角为 β , 因为在分度圆上齿厚等于齿宽, 所以有

$$\beta = \pi m / 4r_j \tag{15}$$

点 O_1P_j 确定了轮齿的对称轴 O_1P_j , 将 O_1P_j 绕 O_1 转过 $-(\beta + \theta_j)$ 即得到渐开线的起始极径 O_1P_{jo} .

$O_j P_j$ 上找到 P_{jk} , $O_j P_{jk} = r_{jk}$. 再有

$$\begin{cases} \alpha_{jk} = \cos^{-1}(r_{jb}/r_{jk}) \\ \theta_{jk} = \operatorname{tg} \alpha_{jk} - \alpha_{jk} \end{cases} \quad (16)$$

点 P_{jk} 绕 O_j 转过 $-(\beta + \theta_j - \theta_{jk})$ 即得 P'_{jk} .

至于一侧渐开线齿廓应取多少个点来进行拟合,可视情况而定。APC 系统的椭圆齿轮中取了 6 个点。要注意的是点不能取到基圆或根圆之内,即必须有 $r_{jk} \leq r_{jb}$ 和 $r_{jk} < r_{jf}$. 此外还必须考虑到齿根处齿廓与齿根圆的过渡圆,在此就不详述了。

4 模数 m 的讨论

两个相同的椭圆齿轮啮合传动时,其从动齿轮的最大速度和最小速度之比^[2]为

$$K = ((a+c)/(a-c))^2 \quad (17)$$

设计椭圆齿轮时通常根据结构需要定出中心距 $A = 2a$. 在满足某一 K 值时,由式(17)求得短半径为 $b = 2aK^{1/4}/(1+K^{1/2})$ (18)

假定根据强度计算出的模数是 m_0 (标准值),可由椭圆近似弧长公式 $S = \pi(a+b)$ 确定齿数 Z , $Z_0 = (a+b)/m_0$ (19)

取 Z 为邻近 Z_0 的奇数。

因为实际的椭圆齿轮节曲线全长为

$$S = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (20)$$

同时还必须满足 $S = \pi m Z$ (21)

两者正好相等的情况不太会发生,因此如选择使用标准模数刀具进行加工的方法就必须修正 a 和 b .

如果用线切割机加工,则在选择好齿数 Z 后设计就完成了,不必修正 a 和 b . 模数 m 此时是个计算值

$$m = (4a/\pi Z) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (22)$$

这给设计者带来的方便是显而易见的。

5 运用高斯-勒让德求积公式的误差估计

高斯公式中的余项为

$$R(\eta) = (2^{2n+1}(n!)^4/(2n+1)(2n!)^3) \cdot f^{(2n)}(\eta) \quad -1 < \eta < 1 \quad (23)$$

对次数小于 $2n$ 的多项式 $f(t)$, 因为 $f^{(2n)}(t) = 0$, 故高斯公式准确成立。本文中

$$f(t) = \sqrt{1 - e^2 \cos^2(\varphi/2 + \varphi/2)} \quad (24)$$

在取 $n = 5$ 时,需求出 $f^{(10)}(t)$ 的最大和最小值来估计余项^[5]

$$R(\eta) = (1/1237732650) \cdot f^{(10)}(\eta) \quad -1 < \eta < 1 \quad (25)$$

的范围。对式(24)两边取对数后求导经整理可得

$$f(t)f'(t) = (\varphi/2)e^2 \cos(\varphi/2 + \varphi/2) \sin(\varphi/2 + \varphi/2) \quad (26)$$

令 $g(t) = (\varphi/2)e^2 \cos(\varphi/2 + \varphi/2) \sin(\varphi/2 + \varphi/2)$ (27)

对式(26)两边求导得

$$[f'(t)]^2 + f(t) \cdot f^{(2)}(t) = (\varphi^2/4)e^2(2\cos^2(\varphi/2 + \varphi/2) - 1) \quad (28)$$

$$\text{令 } h(t) = (\varphi^2/4)e^2(2\cos^2(\varphi/2 + \varphi/2) - 1) \quad (29)$$

对式(28)两边求导得

$$3f'(t)f^{(2)}(t) + f(t)f^{(3)}(t) = -\varphi^2[(\varphi/2)e^2\cos(\varphi/2 + \varphi/2)\sin(\varphi/2 + \varphi/2)] \quad (30)$$

$$\text{亦即 } 3f'(t)f^{(2)}(t) + f(t)f^{(3)}(t) = -\varphi^2 g(t) \quad (31)$$

从式(26)到(31)可以看出

$$g'(t) = h(t) \quad (32)$$

$$h'(t) = -\varphi^2 g(t) \quad (33)$$

对式(31)两边连续求导,直至出现 $f^{(10)}(t)$

$$f^{(10)}(t) = (1/f(t))[-\varphi^2 h(t) - 126[f^{(5)}(t)]^2 - 210f^{(4)}(t)f^{(6)}(t) - 120f^{(3)}(t)f^{(7)}(t) - 45f^{(2)}(t)f^{(8)}(t) - 10f'(t)f^{(9)}(t)] \quad (34)$$

图5为 $R(t) = (1/1237732650)f^{(10)}(t)$ 在 $e = 0.3$ 和 $e = 0.2$ 时 $\varphi = \pi/2, \pi, 2\pi$ 时由计算机画出的曲线,计算时 t 从 -1 到 1 步长为 0.02 . $R(t)_{\min}$ 和 $R(t)_{\max}$ 亦由计算机程序求出. 曲线表明: $R(t)_{\max}$ 和 $|R(t)_{\min}|$ 随 e 和 φ 的增大而增大.

由式(5)(6)(7)和(8)可知:对于每一 φ ,由式(8)求得的弧长的误差 ΔS 为

$$(a\varphi/2)R(t)_{\min} < \Delta S < (a\varphi/2)R(t)_{\max} \quad (35)$$

由图5知,当 $e = 0.3, \varphi = \pi$ 时, $R(t)_{\min} = -1.31 \times 10^{-5}$; $R(t)_{\max} = 2.16 \times 10^{-5}$. 此时 ΔS 与长半轴 a 之比为

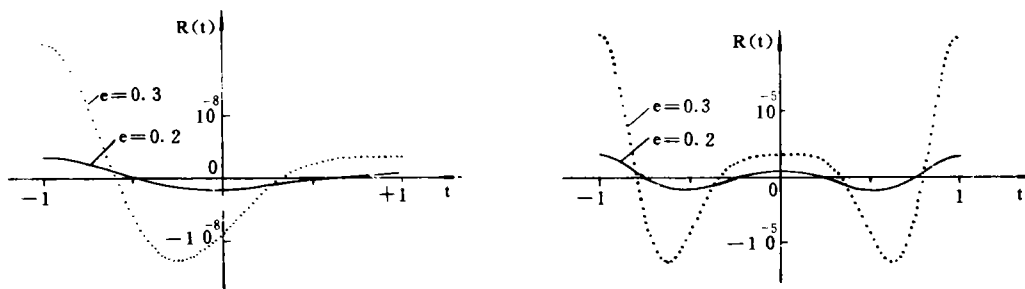
$$-2.06 \times 10^{-5} < \Delta S/a < 3.39 \times 10^{-5} \quad (36)$$

而当 $\varphi = 2\pi$ 时, $R(t)_{\min} = -1.33 \times 10^{-2}$, $R(t)_{\max} = 2.21 \times 10^{-2}$

$$-2.09 \times 10^{-2} < \Delta S/a < 3.47 \times 10^{-2} \quad (37)$$

增加很大,因此编程时先计算出 $0 \sim \pi$ 之间点的参数,再以 $O \sim x$ 为对称轴,用对称语句得到另一半齿的参数的方法比直接从 $0 \sim 2\pi$ 求出全部齿的参数方法较好.

前面讨论时结点数 $n = 5$,若 $n = 4$ 则^[5] $R(t) = (1/3472875)f^{(8)}(t)$,图6表示了 $e = 0.3, \varphi = \pi$ 时, $n = 4$ 和 $n = 5$ 的 $R(t)$ 曲线,给出了各自的 $R(t)_{\min}$ 和 $R(t)_{\max}$ 值,明显地可知结点数多时误差小.



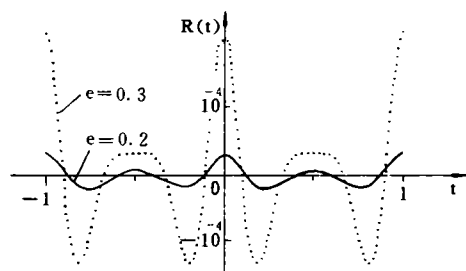
$\varphi = \pi/2$

$e = 0.3 \quad R(t)_{\min} = -1.28E-08 \quad R(t)_{\max} = 2.11E-08 \quad e = 0.3 \quad R(t)_{\min} = -1.31E-05 \quad R(t)_{\max} = 2.16E-05$

$e = 0.2 \quad R(t)_{\min} = -1.95E-09 \quad R(t)_{\max} = 3.34E-09 \quad e = 0.2 \quad R(t)_{\min} = -1.99E-06 \quad R(t)_{\max} = 3.42E-06$

$\varphi = \pi$

图5 $R(t)$ 与 e, φ 的关系 ($n = 5$)



$$\varphi = 2\pi$$

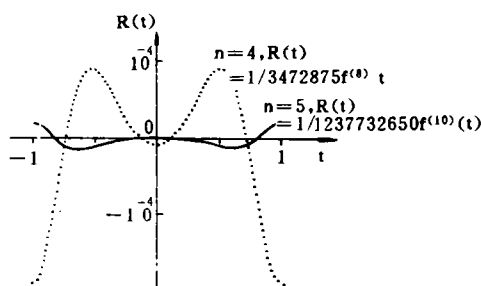
$$e = 0.3 R(t)_{\min} = -1.33E-02 \quad R(t)_{\max} = 2.21E-02$$

$$e = 0.2 R(t)_{\min} = -2.02E-03 \quad R(t)_{\max} = 3.50E-03$$

$$\{e = 0.3; \varphi = \pi\}$$

$$\{n = 4\} R(t)_{\min} = -1.91E-04 \quad R(t)_{\max} = 9.14E-05$$

$$\{n = 5\} R(t)_{\min} = -1.31E-05 \quad R(t)_{\max} = 2.16E-05$$

图5 $R(t)$ 与 e, φ 的关系 ($n = 5$)图6 $R(t)$ 与 n 的关系

5 结 语

标准的椭圆齿轮是成对加工的,本文提出的非标准模数的观点完全适用于椭圆齿轮。对其它非圆齿轮,只要相互啮合的齿轮模数一致也适用,但是否会为设计带来方便,则需再作探讨。齿中点和对应当量参数的确定,对其它形式的平面非圆齿轮,只要将节曲线方程变换一下方法也是适用的。

参 考 文 献

- 1 齿轮手册编委会. 齿轮手册. 机械工业出版社, 1990
- 2 李福生. 非圆齿轮. 机械工业出版社, 1975
- 3 李福生等. 非圆齿轮与特种齿轮传动设计. 机械工业出版社, 1983
- 4 秦林祥. 计算方法. 兵器工业出版社, 1992
- 5 北京矿业学院高等数学教研组. 数学手册. 煤炭工业出版社, 1976
- 6 黄锡恺. 机械原理. 人民教育出版社, 1981

A Programming Method for Machining Elliptic Gear on NC WEDM Machine Tool

Zhou Yijie

(Dept. of Mechanical Eng.)

Abstract This article introduces a method of locating the teeth and determining the teeth shape when machining elliptic gears on NC WEDM machine tool, gives out an opinion about unstandard module which is somewhat better than standard module when machining elliptic gears on NC WEDM.

Subject-words Elliptic gears; Wire-electrode cutting; Modules