第 15 卷 无锡轻工大学学报 Vol. 15
第 2 期 JOURNAL OF WUXI UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY 1996 No. 2

齐次线性方程组正交的基础解系的一种简便求法

吴有炜　　刘华玲

（数理学科部）

摘要　给出了求齐次线性方程组正交的基础解系的一个简便方法和一个应用实例。

主题词　齐次线性方程组；正交的基础解系；实对称阵的对角化

中图分类号　O241.6

实对称矩阵的对角化，需要求正交的特征向量组，理论上可以将线性无关的特征向量通过 Schmidt 方法正交化，但当特征值重数较高时，计算量很大。本文介绍一种直接求齐次线性方程组正交的基础解系的简便方法。

设有齐次线性方程组 $A_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，系数矩阵的秩 $R(A)=r$. 利用行变换化矩阵 A 成行最简形，删去最简形下部为零的行向量，得行满秩的行最简形矩阵 $B_{r\times n}=(b_{ij})$.

称 B 的每个行向量的第一个非零分量 1 所在列为主列，任意指定一个非主列称为特定非主列，其余非主列为一般非主列。则由行最简形矩阵 B 按以下规则唯一确定一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}_1=\{b_{(r+\times n)1},b_{(r+1)2},\cdots,b_{(r+1)n}\}^T$，其中

$$b_{(r+1)i}=\begin{cases}1 & \text{当列标 } i \text{ 代表特定非主列时（譬如第 } s \text{ 列为特定非主列）；}\\ -b_{i_0 s}, & \text{当列标 } i \text{ 代表某主列时，这儿 } i_0 \text{ 为该主列非零分量 1}\\ & \quad\text{所在行的行标；}\\ 0, & \text{当列标 } i \text{ 代表一般非主列时。}\end{cases}$$

设矩阵 B 的第 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 列为主列，B 的第 l 行 $\boldsymbol{b}_l=(b_{l_1},b_{l_2},\cdots,b_{l_n})$ 中第 t_l 个分量 $b_{lt_l}=1$，一般非主列标用字母 j 对应，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_l^{\mathrm{T}}\mathrm{x}_1 &= b_{lt_l}b_{(r+1)t_l}+\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant r\\ d\neq l}}b_{lt_d}b_{(r+1)t_d}+\sum_j b_{lj}\,b_{(r+1)j}+b_{ls}b_{(r+1)s}\\ &= 1\times(-b_{ls})+\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant r\\ d\neq l}}o\times(-b_{t_{d_0}s})+\sum_j b_{lj}\times o+b_{ls}\times 1\\ &= 0 \qquad\qquad (l=1,2,\cdots,r)\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{x}_1$ 满足 $B\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$，从而是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解。

收稿日期：1995-04-19

构造 $(r+1)\times n$ 阵 $B_1=\begin{pmatrix} B \\ \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，经行变换化成行最简形，用上面同样的方法求得 n 维向量 $\boldsymbol{x}_2$，满足 $B_1\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}_2$既是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，又与 $\boldsymbol{x}_1$正交。令 $(r+2)\times n$ 阵 $B_2=\begin{pmatrix} B_1 \\ \boldsymbol{x}_2^{T} \end{pmatrix}$，进入下一循环的讨论。这样经 $n-r$ 次循环，可求得齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的 $n-r$ 个正交的基础解系 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-r}$. 实际上，每一个循环，只需变化一行、一列，则可得到下一个行最简形，随即得到下一个正交解。计算量相对很小。

例1 设齐次线性方程组的系数阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

求方程组正交的基础解系

解

$$A \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=(b_{ij}^{(0)})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

这里 B 的 第1、2列为主列，若指定第3列为特定非主列，则由上述规则得

$$\boldsymbol{x}_1^T=(-b_{13}^{(0)},-b_{23}^{(0)},1,0,0)=(-(-1),-2,1,0,0)$$

令

$$B_1=\begin{bmatrix} B \\ \boldsymbol{x}_1^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \underline{记} \widetilde{B}_1=(b_{ij}^{(1)})$$

若指定 $\widetilde{B}_1$ 的第4列为特定非主列，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1^T &= 3(-b_{14}^{(1)},-b_{34}^{(1)},1,0) \\ &= 3(-(-\frac{2}{3}),-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},1,0)=(2,-1,-4,3,0) \end{aligned}$$

这里行向量乘以3是为了使分量整数化，易见并不影响问题的讨论。有一个帮助记忆这个规则的方法：化成行最简形后，下一个行向量 $\boldsymbol{x}_i^T$的构成，只需将最简形特定非主列转置后，其分量加负号顺次放在 $\boldsymbol{x}_i^T$的主列位置上；$\boldsymbol{x}_i^T$的特定非主列位置取值1，一般非主列位置取值0.

令

$$B_2=\begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \boldsymbol{x}_2^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \\ & & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ & & & 1 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \underline{记} \widetilde{B}_2$$

$\widetilde{B}_2$ 的最后一列自 然为特定非主列，得

$$x_3^T=(-10)(-\frac{2}{5},-\frac{3}{10},-\frac{1}{5},-\frac{1}{10},1)=(4,3,2,1,-10)$$

可以验证 x_1,x_2,x_3是齐次线性方程组 $Ax=0$的正交的基础解系。

例2　求正交阵 P，将对称阵

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&1&-1&1\\-1&0&-1&1&-1\\1&-1&0&-1&1\\-1&1&-1&0&-1\\1&-1&1&-1&0\end{bmatrix}$$化为对角阵。

解　特征多项式 $P(\lambda)=|A-\lambda E|=-(\lambda+1)^4(\lambda-4)$，特征值 $\lambda_{1,2,3,4}=-1$，$\lambda_5=4$

1)　当 $\lambda=-1$ 时，$(A+E)x=0$的同解方程组为 $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=0$. 以下求 $\lambda=-1$ 的 4 个彼此正交的特征向量。

$B=(1\quad -1\quad 1\quad -1\quad 1)$，已是行最简形，指定 B 的第2列为特定非主列，得

$$x_1^T=(-(-1),1,0,0,0)=(1,1,0,0,0)$$

令　$$B_1=\begin{bmatrix}B\\x_1^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\overset{记}{=}\widetilde{B}_1$$

指定第3列为特定非主列，可得

$$x_2^T=(-2)(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0,0)=(1,-1,-2,0,0)$$

令　$$B_2=\begin{bmatrix}B_1\\x_1^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-1&-2&0&0\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\\&&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\overset{记}{=}\widetilde{B}_2$$

指定第4列为特定非主列，可得

$$x_3^T=3(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,0)=(1,-1,1,3,0)$$

令　$$B_3=\begin{bmatrix}\widetilde{B}_2\\x_3^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\&&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\1&-1&1&3&0\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{4}\\&1&0&0&-\frac{1}{4}\\&&1&0&\frac{1}{4}\\&&&1&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

最后一列自然为特定非主列，可得

$$x_4^T=(-4)(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1)=(1,-1,1,-1,-4)$$

可以验证 x_1,x_2,x_3,x_4是特征值 $\lambda=-1$ 的正交的特征向量。

2)　利用互异的特征值之间的特征向量正交以及5维向量空间彼此正交的向量最多只

有5个可以取$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的系数阵的行向量作为特征值$\lambda=4$的特征向量，譬如取$\boldsymbol{x}_5^T=(1,-1,1,-1,1)$.

最后，各向量$\boldsymbol{x}_i$单位化，按列排成正交阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

A Simple Method for the Orthogonal Fundamental Solution of Homogeneous Linear Equation System

Wu Yuwei Liu Hualin
(Dept. of Mathematics and Physics)

Abstract A simple method for the orthogonal fundamental solution of homogeneous linear equation system and the example in its application are given.

Subject-words Homogeneous linear equation system; Orthogonal fundamental solution; Diagonalization of real symmetric matrices