

考虑横向剪应力连续的复合材料 面层夹层板精化理论

王志伟

(机械工程系)

摘要 采用逐段光滑位移矢假设,考虑了横向剪应力在层间的连续及表面的协调,用最小位能原理建立了复合材料面层夹层板的精化理论,所得控制方程含有 7 个未知量。本文理论可视为 Librescu 夹层板模型的精化形式,它可直接计算出数值甚小但工程上颇为重要的层间应力。

主题词 夹层板;复合材料;剪应力;剪应变

中图分类号 O343

0 引言

复合材料面层夹层板是指面层为复合材料的夹层板,其面层一般由复合材料单向层板层合而成,芯层一般为各异性材料。这类夹层板构造上的复杂性,形成了其宏观上各向同性板和各向同性夹层板无法企及的许多优越性能,但也造成了理论分析上的巨大困难。

在迄今为止的夹层板理论研究文献中,一般认为夹层板面层变形符合薄膜假设^[1]或符合 K-L 假设^[2~4],这对各向同性夹层板的变形描述是合适的。但对于复合材料面层夹层板,由于面层及芯层的横向剪切模量都很低,需要同时考虑面层和芯层的横向剪切变形^[5]。为此,本文假设夹层板中任一点位移矢分别在面层和芯层中为法向坐标的逐段光滑矢。通过对位移场的合理近似,并引入夹层板层间和表面应力协调条件,导出了近似位移场的修正形式。然后应用最小位能原理建立了复合材料面层夹层板的控制方程和边界条件。

1 位移场和应变场

在三维 Euclid 空间 $\{x_i\}$ 中考虑厚度为 h 的复合材料面层夹层板,设芯层、面层及面层中各复合材料单层厚度均匀,理想粘合,无缝隙和相对滑动,如图 1。夹层板的下表面、下表层与芯层的界面、上表层与芯层的界面以及上表面分别记为 $\omega_{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, 3$)。取 x_1, x_2 坐标面与 ω_0 重合,则 $\omega_{(m)}$ 可由 $x_3 = x_{3(m)}$ 描述。设夹层板下表层和上表层分别由 k' 和 k'' 层

收稿日期: 1995 06 09

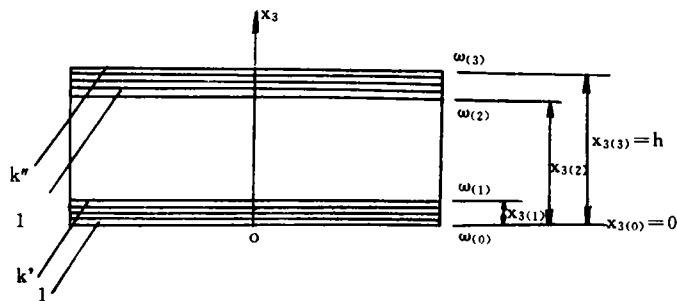


图1 笛卡尔坐标系中的复合材料面层夹层板

由于面层和芯层材料不同, V 不再光滑。即使在两层内, 由于面层为不同的单层板按不同方向层合而成, V 也不再光滑。考虑到材料性质在面层和芯层中的呈层性是夹层板的主要分层特征, 而在面层各单向层板中的呈层性处于次要地位, 假定 V 分别在面层和芯层中为 x_3 的逐段光滑矢。按样条函数理论 V 可用 k 阶多项式样条函数表示成

$$V = u + \sum_{m=0}^2 \sum_{n=1}^k u_{(m)}^{(n)} (x_3 - x_{3(m)})_+^n \quad (2)$$

式中

$$(x_3 - x_{3(m)})_+^n = \begin{cases} (x_3 - x_{3(m)})^n, & x_3 \geq x_{3(m)} \\ 0, & x_3 < x_{3(m)} \end{cases} \quad (3)$$

及

$$(x_3 - x_{3(m)})_+^0 = \begin{cases} 1, & x_3 \geq x_{3(m)} \\ 0, & x_3 < x_{3(m)} \end{cases} \quad (4)$$

为建立一个实用的复合材料面层夹层板理论, 取近似位移场为

$$V_a = u_a + \sum_{m=0}^2 \sum_{n=1}^2 u_{(m)a}^{(n)} (x_3 - x_{3(m)})_+^n \quad (5)$$

$$V_3 = u_3$$

这里 $u_a, u_{(m)a}^{(n)}$ 和 u_3 为 x_3 的待定函数。

本文限定夹层板下表面及上表面无切向力作用, 由式(1), 这等于

$$e_{a3}|_{x_3=0} = 0 \quad e_{a3}|_{x_3=h} = 0 \quad (6)$$

此外, 考虑层间横向剪应力连续, 有

$$\begin{aligned} f^* Q_{a3p3} e_{p3}|_{x_3=x_{3(1)}-0} &= c Q_{a3p3} e_{p3}|_{x_3=x_{3(1)}+0} \\ c Q_{a3p3} e_{p3}|_{x_3=x_{3(2)}-0} &= f^* Q_{a3p3} e_{p3}|_{x_3=x_{3(2)}+0} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $f^* Q_{mnkl}, f^* Q_{mnkl}$ 和 $c Q_{mnkl}$ 分别表示下表层中第 i 单层、上表层中第 i 单层和芯层的弹性常数。

由式(5)及应变位移关系 $e_{ij} = (V_{i,j} + V_{j,i})/2$ 可知

$$e_{a3} = \frac{1}{2} [u_{3,a} + \sum_{m=0}^2 u_{(m)a}^{(1)} (x_3 - x_{3(m)})_+^0 + 2 \sum_{m=0}^2 u_{(m)a}^{(2)} (x_3 - x_{3(m)})_+^1]$$

则为式(6)和式(7)化为

$$u_{3,a} + u_{(0)a}^{(1)} = 0$$

单向层板层合而成。为方便计, 本文采用哑指标求和约定, 希腊指标取值 1 和 2, 拉丁指标取值 1, 2 和 3。对夹层板各层材料采用线弹性假设, 设应力 σ_{ij} 和应变 e_{ij} 服从本构关系

$$\sigma_{a\beta} = Q_{a\beta\delta\rho} e_{\delta\rho} \quad (1)$$

$$\sigma_{a3} = Q_{a3\delta 3} e_{\delta 3}$$

其中 Q_{ijkl} 为弹性常数。

夹层变形后, 板中任一点位移矢 V 为 x_3 的连续矢量, 但

$$\sum_{m=1}^2 u_{(m)a}^{(1)} + 2 \sum_{m=0}^2 u_{(m)a}^{(2)} (h - x_{3(m)}) = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} k' \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} k' \end{pmatrix} Q_{\alpha\beta\gamma} - {}_c Q_{\alpha\beta\gamma} \cdot 2x_{3(1)} u_{(0)\rho}^{(2)} = {}_c Q_{\alpha\beta\gamma} u_{(1)\rho}^{(1)} \\ & {}_c Q_{\alpha\beta\gamma} - \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} Q_{\alpha\beta\gamma} [u_{(1)\rho}^{(1)} + 2x_{3(2)} u_{(0)\rho}^{(2)} + 2(x_{3(2)} - x_{3(1)}) u_{(1)\rho}^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} Q_{\alpha\beta\gamma} u_{(2)\rho}^{(1)} \end{aligned}$$

不妨设夹层板面层与芯层粘结处上下材料不同。记 $u_{(1)a}^{(1)} = \varphi_a, u_{(2)a}^{(1)} = \psi_a$, 则

$$\begin{aligned} \varphi_a &= V_{a,3} |_{x_3=x_{3(1)}+0} - V_{a,3} |_{x_3=x_{3(1)}-0} \\ \psi_a &= V_{a,3} |_{x_3=x_{3(2)}+0} - V_{a,3} |_{x_3=x_{3(2)}-0} \end{aligned} \quad (9)$$

φ_a 和 ψ_a 表征了夹层板位移 V 。在层间上下面的相对转动量。由式(8), $u_{(0)a}^{(2)}, u_{(1)a}^{(2)}$ 和 $u_{(2)a}^{(2)}$ 可用 φ_a 和 ψ_a 来表达, 位移场(5)可写成

$$\begin{aligned} V_a &= u_a - u_{3,a} x_3 + f_{a\lambda} \varphi_\lambda + h_{a\lambda} \psi_\lambda \\ V_3 &= u_3 \end{aligned} \quad (10)$$

这里

$$\begin{aligned} f_{a\lambda} &= \delta_{a\lambda} (x_3 - x_{3(1)})_+ + \frac{1}{2x_{3(1)}} a_{a\lambda}^{(1)} (x_3)^2 - \frac{1}{2(x_{3(2)} - x_{3(1)})} \left(\delta_{a\lambda} + \frac{x_{3(2)}^{(1)}}{x_{3(1)}} a_{a\lambda}^{(1)} \right) (x_3 - x_{3(1)})_+^2 \\ &\quad + \frac{1}{2(x_{3(2)} - x_{3(1)})} (\delta_{a\lambda} + a_{a\lambda}^{(1)}) (x_3 - x_{3(2)})_+^2 \\ h_{a\lambda} &= \delta_{a\lambda} (x_3 - x_{3(2)})_+ + \frac{1}{2(x_{3(2)} - x_{3(1)})} a_{a\lambda}^{(2)} (x_3 - x_{3(1)})_+^2 \\ &\quad - \frac{1}{2(h - x_{3(2)})} \left(\delta_{a\lambda} + \frac{h - x_{3(1)}}{x_{3(2)} - x_{3(1)}} a_{a\lambda}^{(2)} \right) (x_3 - x_{3(2)})_+^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$\delta_{a\lambda}$ 为 Kronecker 记号, 而 $a_{a\lambda}^{(1)}$ 和 $a_{a\lambda}^{(2)}$ 仅与夹层板层间上下面材料弹性常数有关, 其矩阵表达为

$$\begin{aligned} [a_{a\lambda}^{(1)}] &= [{}^{(k')} Q_{\beta\gamma\delta} - {}_c Q_{\beta\gamma\delta}]^{-1} [{}_c Q_{\omega\beta\gamma}] \\ [a_{a\lambda}^{(2)}] &= [{}_c Q_{\beta\gamma\delta} - {}^{(1)} Q_{\beta\gamma\delta}]^{-1} [{}^{(1)} Q_{\omega\beta\gamma}] \end{aligned} \quad (12)$$

相应地, 夹层板的应变为

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \frac{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}}{2} - x_3 u_{3,\alpha\beta} + \frac{f_{a\lambda} \varphi_{\lambda,\beta} + f_{\beta\lambda} \varphi_{\lambda,\alpha} + h_{a\lambda} \psi_{\lambda,\beta} + h_{\beta\lambda} \psi_{\lambda,\alpha}}{2} \\ e_{\alpha 3} &= \frac{f_{a\lambda,3} \varphi_\lambda + h_{a\lambda,3} \psi_\lambda}{2} \\ e_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

2 平衡方程和边界条件

利用最小位能原理及位移场(10)和应变场(13), 不难导出夹层板的平衡方程为

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} &= 0 \\ M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + q &= 0 \\ {}^{(1)} R_{\rho\beta,\beta} - {}^{(1)} T_\rho &= 0 \\ {}^{(2)} R_{\rho\beta,\beta} - {}^{(2)} T_\rho &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

相应的边界条件为: 指定

$$\begin{aligned} n_{\beta} N_{\alpha\beta} \text{ 或 } u_{\alpha}, & \quad n_{\beta} M_{\alpha\beta} \text{ 或 } u_{3,\alpha} \\ n_{\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} \text{ 或 } \varphi_{\alpha}, & \quad n_{\beta} R_{\alpha\beta}^{(2)} \text{ 或 } \psi_{\alpha} \\ n_{\beta} M_{\beta\alpha,\alpha} \text{ 或 } u_3 \end{aligned} \quad (15)$$

这里 q 为作用于夹层板的法向外载, n_{β} 为夹层板边界上的单位外法线矢量分量。而其余量定义为

$$\begin{aligned} [N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, R_{\rho\beta}^{(1)}, R_{\rho\beta}^{(2)}] &= \int_0^h \sigma_{\alpha\beta} [1, x_3, f_{\alpha\rho}, h_{\alpha\rho}] dx_3 \\ [T_{\rho}^{(1)}, T_{\rho}^{(2)}] &= \int_0^h \sigma_{\alpha 3} [f_{\alpha\rho,3}, h_{\alpha\rho,3}] dx_3 \end{aligned} \quad (16)$$

3 控制方程

本构关系(1) 代入(16), 并利用应变位移关系(13), 得

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta} - B_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \varphi_{\gamma,\delta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \psi_{\gamma,\delta} \\ M_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta} - C_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \varphi_{\gamma,\delta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \psi_{\gamma,\delta} \\ R_{\rho\beta}^{(1)} &= D_{\gamma\delta\rho\beta}^{(1)} u_{\gamma,\delta} - E_{\gamma\delta\rho\beta}^{(1)} u_{3,\gamma\delta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(1)(1)} \varphi_{\gamma,\delta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(1)(2)} \psi_{\gamma,\delta} \\ R_{\rho\beta}^{(2)} &= D_{\gamma\delta\rho\beta}^{(2)} u_{\gamma,\delta} - E_{\gamma\delta\rho\beta}^{(2)} u_{3,\gamma\delta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(2)(1)} \varphi_{\gamma,\delta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(2)(2)} \psi_{\gamma,\delta} \\ T_{\rho}^{(1)} &= G_{\rho\lambda}^{(1)(1)} \varphi_{\lambda} + G_{\rho\lambda}^{(1)(2)} \psi_{\lambda} \\ T_{\rho}^{(2)} &= G_{\rho\lambda}^{(2)(1)} \varphi_{\lambda} + G_{\rho\lambda}^{(2)(2)} \psi_{\lambda} \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} [A_{\alpha\beta\gamma\delta}, B_{\alpha\beta\gamma\delta}, C_{\alpha\beta\gamma\delta}, D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}, D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}, E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}, E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}, F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(1)(1)}, F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(1)(2)}, F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(2)(1)}, F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(2)(2)}] \\ = \int_0^h Q_{\alpha\beta\gamma\delta} [1, x_3, (x_3)^2, f_{\gamma\lambda}, h_{\gamma\lambda}, x_3 f_{\gamma\lambda}, x_3 h_{\gamma\lambda}, f_{\alpha\rho} f_{\gamma\lambda}, f_{\alpha\rho} h_{\gamma\lambda}, h_{\alpha\rho} f_{\gamma\lambda}, h_{\alpha\rho} h_{\gamma\lambda}] dx_3 \\ [G_{\rho\lambda}^{(1)(1)}, G_{\rho\lambda}^{(1)(2)}, G_{\rho\lambda}^{(2)(1)}, G_{\rho\lambda}^{(2)(2)}] = \int_0^h Q_{\alpha 3 \gamma 3} [f_{\alpha\rho,3} f_{\gamma\lambda,3}, f_{\alpha\rho,3} h_{\gamma\lambda,3}, h_{\alpha\rho,3} f_{\gamma\lambda,3}, h_{\alpha\rho,3} h_{\gamma\lambda,3}] dx_3 \end{aligned} \quad (18)$$

再将式(17) 代入平衡方程, 即得以基本未知量 $u_{\alpha}, u_3, \varphi_{\alpha}$ 和 ψ_{α} 表示的复合材料面层夹层板理论的控制方程为

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta\beta} - B_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta\beta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \varphi_{\gamma,\delta\beta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \psi_{\gamma,\delta\beta} &= 0 \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta\alpha\beta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \varphi_{\gamma,\delta\alpha\beta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \psi_{\gamma,\delta\alpha\beta} + q &= 0 \\ D_{\gamma\delta\rho\beta}^{(1)} u_{\gamma,\delta\beta} - E_{\gamma\delta\rho\beta}^{(1)} u_{3,\gamma\delta\beta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(1)(1)} \varphi_{\gamma,\delta\beta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(1)(2)} \psi_{\gamma,\delta\beta} - G_{\rho\lambda}^{(1)(1)} \varphi_{\lambda} - G_{\rho\lambda}^{(1)(2)} \psi_{\lambda} &= 0 \\ D_{\gamma\delta\rho\beta}^{(2)} u_{\gamma,\delta\beta} - E_{\gamma\delta\rho\beta}^{(2)} u_{3,\gamma\delta\beta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(2)(1)} \varphi_{\gamma,\delta\beta} + F_{\rho\beta\gamma\delta}^{(2)(2)} \psi_{\gamma,\delta\beta} - G_{\rho\lambda}^{(2)(1)} \varphi_{\lambda} - G_{\rho\lambda}^{(2)(2)} \psi_{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

相应的边界条件由(15)和(17)给出。

4 讨 论

在以往的夹层板理论中, 认为两层变形满足 K-L 假设, 这等价于假定了面层的横向剪切常数 $Q_{\alpha 3 \rho 3} \rightarrow \infty$ 。在本文夹层板理论中考虑此情形时, 由式(12) 可知 $a_{\alpha\lambda}^{(1)} \rightarrow 0, a_{\alpha\lambda}^{(2)} \rightarrow -$

$\delta_{\alpha\lambda}$, 从而 $f_{\alpha\lambda}$ 和 $h_{\alpha\lambda}$ 简化为

$$\begin{aligned} f_{\alpha\lambda} &= \delta_{\alpha\lambda} \left\{ (x_3 - x_{3(1)})_+ - \frac{1}{2(x_{3(2)} - x_{3(1)})} [(x_3 - x_{3(1)})_+^2 - (x_3 - x_{3(2)})_+^2] \right\} \\ h_{\alpha\lambda} &= \delta_{\alpha\lambda} \left\{ (x_3 - x_{3(2)})_+ - \frac{1}{2(x_{3(2)} - x_{3(1)})} [(x_3 - x_{3(1)})_+^2 - (x_3 - x_{3(2)})_+^2] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

而位移场成为

$$\begin{aligned} V_\alpha &= u_\alpha - u_{3,\alpha} x_3 + \varphi_\alpha (x_3 - x_{3(1)})_+ + \psi_\alpha (x_3 - x_{3(2)})_+ \\ &\quad - \frac{1}{2(x_{3(2)} - x_{3(1)})} (\varphi_\alpha + \psi_\alpha) [(x_3 - x_{3(1)})_+^2 - (x_3 - x_{3(2)})_+^2] \\ V_3 &= u_3 \end{aligned} \quad (21)$$

进一步假设位移 V_α 在层间上下面的相对转动量 $\varphi_\alpha, \psi_\alpha$ 满足下列关系

$$\psi_\alpha = -\varphi_\alpha \quad (22)$$

则位移场成为

$$\begin{aligned} V_\alpha &= u_\alpha - x_3 u_{3,\alpha} + \varphi_\alpha [(x_3 - x_{3(1)})_+ - (x_3 - x_{3(2)})_+] \\ V_3 &= u_3 \end{aligned} \quad (23)$$

Librescu^[3]在考虑两面层对称布置的各向异性夹层板问题时,曾假定:芯层面内位移沿板厚度线性分布;芯层横向位移沿板厚度不变;两面层满足 K-L 假设。采用本文记号其位移场即为式(23)。从而本文理论可视为 Librescu 夹层板模型的精化形式。

本文复合材料面层夹层板精化理论同时考虑了面层及芯层的横向剪切变形,满足夹层板横向剪应力上下表面协调和层间连续条件,控制方程中含有 7 个基本未知量,比较易于求解。此外,按本文理论可直接计算数值甚小但工程上颇为重要的层间应力。

参 考 文 献

- 1 Reissner E. On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., 1947, 5:55
- 2 Eringen A C. Bending and buckling of rectangular sandwich plates. Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1952: 381
- 3 Librescu L. Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell Type Structures. Noordhoff Int. Pub. 1973
- 4 刘人怀,朱金福. 夹层壳非线性理论. 机械工业出版社,1993
- 5 Koganti M R, Meyer-Piening H-R. Analysis of sandwich plates using a hybrid-stress finite element. J. AIAA, 1991, 29:1498
- 6 王志伟. 复合材料面层夹层壳体非线性理论及应用. [博士论文]. 上海:同济大学,1994
- 7 Ebcioglu I K. A general nonlinear theory of sandwich panels. Int. J. Engng Sci., 1989, 27:865

A Refined Theory for Sandwich Plates Faced with Laminated Composites Accounting for Continuity of Transverse Shear Stresses

Wang Zhiwei

(Dept. of Mech. Eng.)

Abstract By using the principle of stationary potential energy, a refined theory for sandwich plates faced with laminated composites is established on the assumption of layer-wise smooth displacement vector, which accounts for continuous or compatible conditions of transverse shear stresses at interfaces and on boundary surfaces. The governing equations include seven unknown functions. The theory can be treated as the refined form of the Librescu's model. The transverse shear stresses at interfaces which are smaller but rather important in engineering can be calculated from this theory.

Subject-words Sandwich laminates; Composite materials; Shear stress; Shear strain