

关于二元连续函数为凸函数的两个条件

杨志荣 吴有炜

(无锡轻工大学数理学科部, 无锡, 214036)

摘要 推广和改进了连续函数为凸函数的条件。

关键词 凸函数; 凸区域; 连续函数

中图分类号 O241.1

0 前言

区间 I 上的连续凸函数可定义为: 对任意的 $x_1, x_2 \in I$ 和任意实数 $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1), \mu_1 + \mu_2 = 1$, 恒有

$$f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \leq \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2)$$

文[1], 文[2] 分别指出:

连续函数 $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数的充要条件为:

对任意 $x, x_0 \in I$, 恒有

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x)(x - x_0) \quad (1)$$

这里 $\lambda(x)$ 为区间 I 上的实函数。亦可等价于:

对任意 x_0 , 以及 $h > 0, x_0 - h, x_0 + h \in I$ 恒有

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx \leq \frac{1}{2} [f(x_0-h) + f(x_0+h)] \quad (2)$$

本文中考考虑二元函数的类似结论。

定义: 设 $f(x, y)$ 为凸区域 D 内的连续函数, 若对任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 和任意实数 $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1), \mu_1 + \mu_2 = 1$, 恒有

$$f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) \leq \mu_1 f(x_1, y_1) + \mu_2 f(x_2, y_2)$$

则称 $f(x, y)$ 是区域 D 上的凸函数。

1 定理

二元连续函数 $f(x, y)$ 为区域 D 上的凸函数, 在几何上表现为过曲面 $z = f(x, y)$ 上任一点, 均能作一个平面, 使曲面在平面的上方。下述定理就体现了这个结论。

定理1 设 $f(x, y)$ 为凸区域 D 上的连续函数, 则 $f(x, y)$ 为区域 D 上的凸函数的充要

条件是:

对任意 $(x, y), (x_0, y_0) \in D$, 恒有

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \lambda_1(x_0)(x - x_0) + \lambda_2(x_0)(y - y_0)$$

成立, 这里 $\lambda_1(x), \lambda_2(y)$ 是区域 D 上的实函数。

证明 必要性: 设 $f(x, y)$ 是区域 D 上的连续凸函数, 任取 $(x, y), (x_0, y_0) \in D$, 实数 $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1), \mu_1 + \mu_2 = 1$, 记

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{令} \quad G(\quad) = f\left(\quad, y_0 + \frac{y - y_0}{x - x_0}(\quad - x_0)\right),$$

则

$$\begin{aligned} G(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) &= f\left[\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, y_0 + \frac{y - y_0}{x - x_0}(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - x_0)\right] \\ &= f\left[\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \mu_1 \left[y_0 + \frac{y - y_0}{x - x_0}(x_1 - x_0)\right] + \mu_2 \left[y_0 + \frac{y - y_0}{x - x_0}(x_2 - x_0)\right]\right] \\ &\leq \mu_1 f\left[x_1, y_0 + \frac{y - y_0}{x - x_0}(x_1 - x_0)\right] + \mu_2 f\left[x_2, y_0 + \frac{y - y_0}{x - x_0}(x_2 - x_0)\right] \\ &= \mu_1 G(x_1) + \mu_2 G(x_2) \end{aligned}$$

由此知, $G(\quad)$ 是凸函数。

类似, 令 $H(Y) = f(x_0 + \frac{x - x_0}{y - y_0}(Y - y_0), Y)$, 可以证明 $H(Y)$ 也是凸函数。

又 $G(x_0) = H(y_0) = f(x_0, y_0)$, 利用结论(1), 当 X 与 Y 满足比例关系 $\frac{Y - y_0}{X - x_0} =$

$\frac{y - y_0}{x - x_0}$ 时,

$$f(X, Y) = G(X) \geq G(x_0) + 2\lambda_1(x_0)(X - x_0) = f(x_0, y_0) + 2\lambda_1(x_0)(X - x_0) \quad (3)$$

$$f(X, Y) = H(Y) \geq H(y_0) + 2\lambda_2(y_0)(Y - y_0) = f(x_0, y_0) + 2\lambda_2(y_0)(Y - y_0) \quad (4)$$

在(3)中取 $X = x$ 时, $Y = y$; 在(4)中取 $Y = y$ 时, $X = x$. 此时结合(3)与(4)得

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \lambda_1(x_0)(x - x_0) + \lambda_2(y_0)(y - y_0) \quad (5)$$

充分性: 设(5)对任意 $(x_0, y_0), (x, y) \in D$ 成立. 任取 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 以及任意实数 $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1), \mu_1 + \mu_2 = 1$, 由(5)得

$$f(x_1, y_1) \geq f(x_0, y_0) + \lambda_1(x_0)(x_1 - x_0) + \lambda_2(y_0)(y_1 - y_0) \quad (6)$$

$$f(x_2, y_2) \geq f(x_0, y_0) + \lambda_1(x_0)(x_2 - x_0) + \lambda_2(y_0)(y_2 - y_0) \quad (7)$$

特殊取 $x_0 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, y_0 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$, 相应地有

$$\mu_1(x_1 - x_0) = -\mu_2(x_2 - x_0), \mu_1(y_1 - y_0) = -\mu_2(y_2 - y_0)$$

由(6)和(7)得

$$\mu_1 f(x_1, y_1) + \mu_2 f(x_2, y_2) \geq f(x_0, y_0) = f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)$$

从而 $f(x, y)$ 是区域 D 上的凸函数. 证毕。

下述定理2说明了凸函数在一点的函数值与邻近区域及边界上的函数均值间的关系, 这与凸函数的几何直观是一致的。

定理2 设连续函数 $f(x, y)$ 是区域 D 内的凸函数, 任取 $(x_0, y_0) \in D$, 记 D 内以 $(x_0,$

y_0) 为圆心的任意圆域为 σ : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$, S 为 σ 的边界, 则

$$f(x_0, y_0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy \leq \frac{1}{2\pi R} \int_S f(x, y) ds$$

证明 因为 $f(x, y)$ 是区域 D 内的凸函数, 由定理 1 知:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \lambda_1(x_0)(x - x_0) + \lambda_2(y_0)(y - y_0)$$

将不等式两边在 σ 上积分并利用积分区域 σ 关于变量 $(x - x_0), (y - y_0)$ 的对称性, 得

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \geq \iint_{\sigma} f(x_0, y_0) d\sigma + 0 + 0 = \pi R^2 f(x_0, y_0)$$

即

$$f(x_0, y_0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$$

对积分 $I_1 = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ 进行坐标变换

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = x_0 + r \cos \theta & -R \leq r \leq R \\ y = y(r, \theta) = y_0 + r \sin \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

由凸函数定义

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\frac{R-r}{2R}(x_0 - R \cos \theta) + \frac{R+r}{2R}(x_0 + R \cos \theta), \right. \\ &\quad \left. \frac{R-r}{2R}(y_0 - R \sin \theta) + \frac{R+r}{2R}(y_0 + R \sin \theta)\right) \\ &\leq \frac{R-r}{2R} f(x_0 - R \cos \theta, y_0 - R \sin \theta) + \frac{R+r}{2R} f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} f(x_0 - R \cos \theta, y_0 - R \sin \theta) + \frac{1}{2} f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) \\ &\quad + \frac{r}{2R} [f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) - f(x_0 - R \cos \theta, y_0 - R \sin \theta)] \end{aligned}$$

将不等式两边在 σ 上积分并注意到积分 $\int_{-R}^R r dr = 0$, 得

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma &= \int_0^{\pi} d\theta \int_{-R}^R f(x, y) r dr \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [f(x_0 - R \cos \theta, y_0 - R \sin \theta) + f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta)] d\theta \int_{-R}^R r dr \quad (8) \end{aligned}$$

将 $\int_{-R}^R r dr = R^2$ 及

$$\int_0^{\pi} f(x_0 - R \cos \theta, y_0 - R \sin \theta) d\theta \stackrel{\alpha = \theta + \pi}{=} \int_{\pi}^{2\pi} f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) d\theta$$

代入不等式 (8) 右端得

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \leq \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) d\theta$$

又曲线积分 $I_2 = \int_S f(x, y) ds = R \int_0^{2\pi} f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) d\theta$

比较积分 I_1, I_2 得 $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \leq \frac{R}{2} \int_S f(x, y) ds$

综上所述:

$$f(x_0, y_0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint f(x, y) d\sigma \leq \frac{1}{2\pi R} \int f(x, y) ds \quad \text{证毕.}$$

2 举 例

下面通过一个简单的例子来说明定理 2 的结论仅是构成凸函数的必要条件而非充分条件, 这有别于一元函数情形下结论 (2) 是凸函数的充分必要条件。

例 二元函数 $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, 在几何上表示马鞍面, $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = -2$,

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = -4 < 0$$

由相关结论知马鞍面 $z = f(x, y)$ 在任何区域内既不是凸的也不是凹的。类似于定理 2 取区域

$\sigma: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2, S$ 为 σ 的边界, 则

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint f(x, y) d\sigma = \frac{1}{2\pi R} \int f(x, y) ds = x_0^2 - y_0^2.$$

参 考 文 献

- 1 张占通. 关于凸函数的两个充分条件. 工科数学. 1992, (4)
- 2 张占通等. 连续函数为凸函数的两个充要条件. 工科数学. 1994, (3)

Two Conditions for Continuous Function of Two Variables of Convex Function

Yang Zhirong Wu Youwei

(Dept. of Math. & Phys. Sci. Wuxi University of Light Industry, Wuxi, 214036)

Abstract This paper extends and improves the conditions of continuous function to be convex function

Key-words convex function; convex field; continuous function