

# 积分第二中值定理的中值的变化趋势

吴瑞明

(无锡轻工大学数理学科部, 无锡, 214036)

**摘要** 分别在  $Df(a) \neq 0$  和  $f_+^{(i)}(a) = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1), Df^{(n-1)}(a) \neq 0$  的情况下, 研究了积分第二中值定理中  $a$  的变化趋势, 并把所得结果应用于近似求积.

**关键词** 积分第二中值定理; 中值; 变化趋势; 近似求积

**中图分类号** O241.4

## 0 前 言

如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  单调连续, 则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $a$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(a - a) + f(b)(b - a), \quad (1)$$

这就是积分第二中值定理.

当  $b \rightarrow a$  时, 关于  $a$  的变化趋势, 文 [1] 给出了如下定理:

**定理 A** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  单调,  $f'(x)$  在  $[a, b]$  存在, 在  $x = a$  处右连续, 且  $f_+'(a) \neq 0$ , 那末 (1) 中的  $a$  有

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a - a}{b - a} = \frac{1}{2}.$$

当  $f_+'(a)$  不存在时, 定理 A 的结论不一定成立. 例如  $\int_0^b \frac{1}{x} dx = \frac{1}{b}(b - a)$ , 即  $\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{1}{2}}(b - a)$ , 有  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$ , 这是因为  $(\frac{1}{x})'|_{x=0}$  不存在. 本文中研究当  $f_+'(a)$  不存在时 (1) 中的  $a$  的变化趋势.

当  $f_+^{(i)}(a) = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1), f_+^{(n)}(a) \neq 0$  时, 文 [1] 给出了如下定理:

**定理 B** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  单调,  $f^{(n)}(x)$  在  $[a, b]$  存在, 在  $x = a$  处右连续, 且  $f_+^{(i)}(a) = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1), f_+^{(n)}(a) \neq 0$ , 那末 (1) 中的  $a$  有

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a - a}{b - a} = \frac{n}{n+1}.$$

本文中研究当  $f_+^{(i)}(a) = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ , 但  $f_+^{(n)}(a)$  不存在时 (1) 中的  $a$  的变化趋势, 并把所得结果应用于定积分的近似计算.

## 1 $Df(a) \neq 0$ 的情形

设  $f(x)$  在  $x = a$  的右邻域内有定义, 如果  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}$  存在 ( $T$  是  $(0, 1)$  内的某实

收稿日期: 1997-06-28

第一作者: 吴瑞明, 女, 1953 年 1 月出生, 讲师

数), 则称这极限为  $f(x)$  在  $x = a$  处的  $\Gamma$  导数, 记作  $D_{\Gamma}f(a)$ . 显然  $D_{\Gamma}f(a)$  即  $f'_{+}(a)$ . 而当  $D_{\Gamma}f(a)$  ( $\Gamma$  是  $(0, 1)$  内的某实数) 存在时,  $f'_{+}(a)$  可能不存在.

**定理 1** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  单调连续,  $D_{\Gamma}f(a)$  存在且不等于零, 那末 (1) 中的  $a$  有

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a-a}{b-a} = \frac{\Gamma}{\Gamma-1}. \quad (2)$$

证 记  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ , 由广义 Taylor 公式<sup>[2]</sup>,

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{D_{\Gamma}F'(a)}{\Gamma-1} (b-a)^{\Gamma-1} + o[(b-a)^{\Gamma-1}],$$

即 
$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(b-a) + \frac{D_{\Gamma}f(a)}{\Gamma-1} (b-a)^{\Gamma-1} + o[(b-a)^{\Gamma-1}], \quad (3)$$

又 
$$f(b) = f(a) + D_{\Gamma}f(a)(b-a)^{\Gamma-1} + o[(b-a)^{\Gamma-1}]. \quad (4)$$

以 (3) (4) 代入 (1), 令  $b \rightarrow a$ , 得

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{b-a}{b-a} = \frac{1}{\Gamma-1}$$

即得 (2). 证毕.

**例 1**  $\int_0^b \sin \frac{x}{b} dx = (b-a) \sin \frac{a}{b}$  ( $b > 0$ ), 求  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b}$ .

解 因  $(\sin \frac{x}{b})'|_{x=0}$  不存在, 不能用定理 A. 但  $D_{\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{b}|_{x=0} \neq 0$ , 据定理 1, 有

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \frac{1}{3}.$$

## 2 $f^{(i)}(a) = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ , $D_{\Gamma}f^{(n-1)}(a) \neq 0$ 的情形

**定理 2** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  单调,  $f^{(n-1)}(x)$  在  $[a, b]$  存在,  $f^{(i)}(a) = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ ,  $D_{\Gamma}f^{(n-1)}(a)$  存在且不等于零, 那末 (1) 中的  $a$  有

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a-a}{b-a} = \frac{n\Gamma-1}{n\Gamma}. \quad (5)$$

证 记  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ , 则  $F^{(i)}(a) = 0 (i = 2, 3, \dots, n)$ , 由广义 Taylor 公式,

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{D_{\Gamma}F^{(n)}(a)}{n! \binom{n}{n}} (b-a)^{n\Gamma-1} + o[(b-a)^{n\Gamma-1}],$$

即 
$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(b-a) + \frac{D_{\Gamma}f^{(n-1)}(a)}{n! \binom{n}{n}} (b-a)^{n\Gamma-1} + o[(b-a)^{n\Gamma-1}]. \quad (6)$$

又 
$$f(b) = f(a) + \frac{D_{\Gamma}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)! \binom{n-1}{n-1}} (b-a)^{n\Gamma-1} + o[(b-a)^{n\Gamma-1}]. \quad (7)$$

以 (6) (7) 代入 (1), 得

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{b-a}{b-a} = \frac{1}{n\Gamma},$$

即得 (5). 证毕.

**例 2**  $\int_0^b x^{\frac{3}{2}} \cos(x^{\frac{5}{2}+1}) dx = (b-a)b^{\frac{3}{2}} \cos(b^{\frac{5}{2}+1})$  ( $b > 0$ ), 求  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b}$ .

解 记  $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \cos(x^{\frac{5}{2}+1})$ , 有  $f'_{+}(0) = 0$ , 因  $f''_{+}(0)$  不存在, 不能用定理 B, 但

$D_{\frac{3}{2}}f'(0) = \frac{3}{2} \cos \neq 0$ , 根据定理 2, 有

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \frac{3}{5}.$$

### 3 应用

当  $f_+^{(i)}(a) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $f_+^{(n)}(a)$  存在时, 文 [1] 改进了定积分近似计算的梯形公式. 当  $f_+^{(n)}(a)$  不存在但  $D_1 f_+^{(n-1)}(a)$  存在时, 作者对梯形公式作相应的改进.

据定理 2, 以  $a + \frac{n+1}{n+1} \frac{1}{T} (b-a)$  代替 (1) 中的  $a$ , 即取  $[\frac{n+1}{n+1} \frac{1}{T} f(a) + \frac{1}{n+1} \frac{1}{T} f(b)](b-a)$  作为  $\int_a^b f(x) dx$  的近似值, 有下述定理:

**定理 3** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  单调,  $f^{(n-1)}(x)$  在  $[a, b]$  存在,  $f_+^{(i)}(a) = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $D_1 f^{(n-1)}(a)$  存在且不等于零, 那末

$$\int_a^b f(x) dx = [\frac{n+1}{n+1} \frac{1}{T} f(a) + \frac{1}{n+1} \frac{1}{T} f(b)](b-a) + o[(b-a)^{n+1}]. \quad (8)$$

证 由 (6), (7) 即得 (8).

**例 3** 计算  $\int_0^{0.4} \frac{1}{x} \sin x dx$ .

解 记  $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$ , 因  $f_+'(0) = 0$ ,  $f_+''(0)$  不存在,  $D_1 \frac{1}{2} f'(0) = \frac{3}{2} \neq 0$ , 按公式 (8) 计算,

$$\text{原式} \doteq [\frac{3}{5} f(0) + \frac{2}{5} f(0.4)] \times 0.4 = 0.0394.$$

按梯形公式计算,

$$\text{原式} \doteq \frac{1}{2} [f(0) + f(0.4)] \times 0.4 = 0.0493.$$

而用幂级数计算,

$$\text{原式} = \frac{2}{5} \times 0.4^5 - \frac{2}{9 \times 3} \times 0.4^9 + \frac{2}{13 \times 5} \times 0.4^{13} - \dots \doteq 0.0399.$$

显然公式 (8) 的计算结果优于梯形公式的计算结果.

#### 参 考 文 献

- 1 费荣昌等. 梯形公式的推广和改进. 无锡轻工大学学报, 1995, 1: 87-94
- 2 孙燮华. 关于 Taylor 公式的推广及其应用. 数学的实践和认识, 1995, 4: 86-89

## On Asymptotic State of Mean Value of Second Mean Value Theorem for Integral

Wu Ruiming

(Dept. of Math. & phys. Sci. Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036)

**Abstract** When 1)  $D_1 f(a) \neq 0$ ; 2)  $f_+^{(i)}(a) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $D_1 f^{(n-1)}(a) \neq 0$ , the asymptotic state of mean value of second mean value theorem for integral are respectively studied, their varying trend has been studied, these results are then applied to approximate integration.

**Key-words** second mean value theorem for integral; mean value; asymptotic state; approximate integration

(责任编辑: 秦和平)