第2卷 无锡轻工大学学报 Vol. 17
第2期 JOURNAL OF WUXI UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY 1998 No. 2

空间 $C[0, 1]$ 的一个新的Schauder 基

柴伯琪

(无锡轻工大学数理学科部, 无锡214036)

摘要 引入了区间[0, 1]上一个新的标准正交系$\{gal_k(t)\}_0^\infty$, 证明了它在[0, 1]上是一致有界的且是空间$C[0, 1]$的Schauder 基, 同时$\{gal_k(t)\}_0^\infty$的Lebesgue 函数$\{L_n^{(G)}(t)\}$在[0, 1]上也是一致有界的, 且$\{gal_k(t)\}_0^\infty$还是[0, 1]上的一个收敛系。

关键词 标准正交系; 最佳逼近; Schauder 基; Lebesgue 函数组; 收敛系

中图分类号 O174. 21/ O174. 41

0 引 言

已知, 线性无关的Schauder 函数组$\{1, \varphi_m(t) = \int \chi_m(s)\,ds\}$ (式中$0 \le t \le 1$, $\{\chi_m(t)\}$是Haar 函数系) 是空间$C[0, 1]$的Schauder 基[1]。Franklin[2]得到了[0, 1]上一个完备的标准正交系——Franklin 函数系$\{f_n(t)\}_0^\infty$, 并证明了它是$C[0, 1]$的Schauder 基, 但它在[0, 1]上不是一致有界(或称总体有界)的。Ciesielski[3]引入了一个新的标准正交系$\{C_n(t)\}$, 它是一致有界的但并非$C[0, 1]$的Schauder 基。

作者在文中做了以下工作: 对Walsh 函数系的积分应用Schmidt 正交化方法, 引入了[0, 1]上一个新的标准正交系$\{gal_k(t)\}_0^\infty$, 证明了它是完备的且在[0, 1]上是一致的界的; 并由逼近定理推出它是$C[0, 1]$的Schauder 基, 从而推翻了 ½ÎÑ¿À³[4]关于空间$C[0, 1]$不存在总体有界的标准正交基的猜想; 证明了$\{gal_k(t)\}$的Lebegue 函数组是总体有界的, 而且$\{gal_k(t)\}$是一个收敛系。

1 一个新的标准正交系

置$\psi al_0(t) \equiv 1, \psi al_{k+1}(t) = \int w\,al_k(s)\,ds, 0 \le t \le 1, k = 0, 1, 2, \cdots,$ (1)

式中$w\,al_k(t)$是按列率排列的Walsh 函数[5], 显然, 函数组$\{\psi al_k(t)\}_0^\infty$是线性无关的, 对$\{\psi al_k(t)\}$用Schmidt 程序标准正交化后所得的标准正交函数系记为$\{gal_k(t)\}_0^\infty$. 容易证明$\{\psi al_k(t)\}_0^\infty$是完备的, 事实上, 若有可积函数$f(t)$使得

$$\int f(t)\,\psi al_k(t)\,dt = 0, k = 0, 1, 2, \cdots$$

收稿日期: 1997-03-17
第一作者: 柴伯琪, 男, 1941年5月生, 副教授

则

$$0=\int f(t)\,\Psi al_{k+1}(t)\,dt=\int f(t)\int wal_k(s)\,ds\,dt=\int wal_k(s)\,ds\int f(t)\,dt$$

$$=-\int F(s)\,wal_k(s)\,ds,\ k=1,2,3\cdots,$$

式中 $F(t)=\int f(s)\,ds$, 再由 $\int f(t)\,\Psi al_1(t)\,dt=0$, 可算出 $\int F(t)\,dt=0$. 于是

$$\int F(t)\,wal_k(t)\,dt=0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

但 $\{wal_k(t)\}_0^\infty$ 是完备的正交系[5], 故在 $[0,1]$ 上几乎处处有 $F(t)=0$, 从而几乎处处有 $f(t)=F'(t)=0$, 即 $\{\Psi al_k(t)\}_0^\infty$ 是完备的, 再由文献[6]32页的定理4, 知函数系 $\{gal_k(t)\}_0^\infty$ 是完备的。即有:

定理1　函数系 $\{gal_k(t)\}_0^\infty$ 是 $[0,1]$ 上完备的标准正交系。

设 $\{w_k(t)\}_0^\infty$ 是按 Paley 序排列的 Walsh 函数系, 置

$$\Psi_0(t)\equiv 1,\ \Psi_{k+1}(t)=\int w_k(s)\,ds,\ 0\le t\le 1,\ k=1,2,3,\cdots \tag{3}$$

由于[5]

$$wal_k(t)=w_{G(k)}(t),\ k=0,1,2,\cdots, \tag{4}$$

这里 $G(k)$ 表示 k 的 Gray 码[5], 如果规定 $G(-1)=-1$, 则由(1)与(3)两式知

$$\Psi al_k(t)=\Psi_{1+G(k-1)}(t),\ k=0,1,2,\cdots, \tag{5}$$

又由于 $k\leftrightarrow 1+G(k-1)$ 是一一映射, 所以函数组 $\{\Psi al_k(t)\}_0^{2^n}$ 与 $\{\Psi_k(t)\}_0^{2^n}$ 是一样的, 仅排列次序不同, 因此, 若 $\{\Psi_k(t)\}$ 经 Schmidt 方法产生的标准正交系记为 $\{g_k(t)\}_0^\infty$, 则有如下推论:

推论　函数系 $\{g_k(t)\}_0^\infty$ 是 $[0,1]$ 上完备的标准正交系。

注意, $\{g_k(t)\}$ 与 $\{gal_k(t)\}$ 是两个不同的函数系。事实上, $g_6(t)\notin\{gal_k(t)\}_0^\infty$.

2　标准正交系 $\{gal_k(t)\}_0^\infty$

定理2　(Ⅰ) 将 $\{gal_k(t)\}$ 以周期1延拓至全直线, 则 $\{gal_{2k}(t)\}$ 是 t 的偶函数, $\{gal_{2k+1}(t)\}$ 是 t 的奇函数($k=0,1,2,\cdots$);

(Ⅱ)

$$gal_{2k}(1-t)=gal_{2k}(t),\ 0\le t\le 1,\ k=0,1,2\cdots \tag{6}$$

证　(Ⅰ) 按 Schmidt 的正交化公式[7], 有

$$gal_k(t)=\frac{\Psi al_k(t)-S_{k-1}(\Psi al_k,t)}{\|\Psi al_k(t)-S_{k-1}(\Psi al_k,t)\|_2}, \tag{7}$$

式中 $S_k(f,t)$ 表示可积函数 $f(t)$ 关于正交系 $\{gal_k(t)\}$ 的 Fourier 级数的 k 次部分和(前 $k+1$ 项之和), $\|f\|_2=\left[\int |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$ (当用(7)式来计算 $g_k(t)$ 时, 只须将其中的 $\Psi al_k(t)$ 换成 $\Psi_k(t)$, 且 $S_{k-1}(\Psi_k,t)$ 是 $\Psi_k(t)$ 关于 $\{g_k(t)\}$ 的 Fourier 展开的部分和)。由(7)式可算出

$$gal_0(t)=1,\ gal_1(t)=\sqrt{3}\,(2t-1),$$

$$gal_2(t)=\begin{cases}\sqrt{3}\,(4t-1) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \sqrt{3}\,(3-4t) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases},\qquad gal_3(t)=\sqrt{\frac{3}{7}}\begin{cases}22t-3 & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ 5-10t & \frac{1}{4}\le t\le\frac{3}{4}\\ 22t-19 & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases} \tag{8}$$

以下用归纳法证明(Ⅰ),在作了周期1的延拓后由(8)式知,$gal_0(t)$ 和 $gal_2(t)$ 都是偶函数。假设 $gal_{2n}(t)$,当 $n\leq k-1$时都是偶函数。因为

$$gal_{2k}(t)=\frac{\psi al_{2k}(t)-S_{2k-1}(\psi al_{2k},t)}{\|\psi al_{2k}(t)-S_{2k-1}(\psi al_{2k},t)\|_2},\tag{9}$$

式中 $\psi al_{2k}(t)$ 经周期1延拓后是偶函数,从而 $S_{2k-1}(\psi al_{2k},t)=\sum_{i=1}^{k-1}a_{2i}gal_{2i}(t)$ 也是偶函数($a_{2i}=\int\psi al_{2k}(t)gal_{2i}(t)\mathrm{d}t$)。于是由(9)式知 $gal_{2k}(t)$ 是偶函数。类似的可以证明 $gal_{2k+1}(t)$ 经周期1延拓后是t 的奇函数($\psi al_{2k+1}(t)$ 中只有 $\psi al_1(t)=t$ 不是奇函数,但它可用$\psi al_1(t)=t-\frac{1}{2}$来代替)。

(Ⅱ)由于[5]

$$wal_{2k-1}(1-t)=-wal_{2k-1}(t),\tag{10}$$

两边积分,得

$$\psi al_{2k}(1-t)=\psi al_{2k}(t),\quad 0\leq t\leq 1,\quad k=0,1,2,\cdots\tag{11}$$

由 Schmidt 正交化程序知,偶函数 $gal_{2k}(t)$ 必是偶函数 $\psi al_0(t),\psi al_2(t),\cdots,\psi al_k(t)$ 的线性组合,于是由(11)式知(6)式成立。证毕。

定理3

$$gal_{2^n}(t)=\sqrt{3}\,2^{n+1}\begin{cases}\left|t-\frac{k}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right| & \frac{2k}{2^n}\leq t\leq\frac{2k+1}{2^n}\\ \left|\frac{k+1}{2^{n-1}}-t-\frac{1}{2^{n+1}}\right| & \frac{2k+1}{2^n}\leq t\leq\frac{2k+1}{2^n}\end{cases},\ 0\leq k\leq 2^{n-1}-1\tag{12}$$

证 已知,Schmidt 的正交化公式可用行列式表示[6]:

$$gal_k(t)=\frac{\Omega_k(t)}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}}=\frac{\psi al_k(t)-S_{k-1}(\psi al_k,t)}{\|\psi al_k(t)-S_{k-1}\psi al_k,t)\|_2}\overset{\text{设为}}{=\!=}\sum_{i=0}^{k}\mu_{ik}\psi al_i(t),\tag{13}$$

式中 $\Delta_k=G(\psi al_0,\psi al_1,\cdots,\psi al_k)=\det(b_{ij})_0^k$, $b_{ij}=(\psi al_i,\psi al_j)=\int_0^1\psi al_i(t)\psi al_j(t)\mathrm{d}t$, $\Omega_k(t)$ 是把 Δ_k 的第 $k+1$ 列元素 b_{ik} 换成 $\psi al_i(t)(0\leq i\leq k)$ 后所得的 $k+1$ 阶行列式,$\mu_{kk}>0$.

将(13)式中的$\Omega_k(t)$按最后一列展开,易知 $\psi al_k(t)$ 的系数为 Δ_{k-1},从而

$$gal_k(t)=\sqrt{\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}}\psi al_k(t)+\sum_{i=0}^{k-1}\mu_{ik}\psi al_i(t)\tag{14}$$

下面计算 $\mu_{2^n2^n}$,容易算出

$$b_{0i}=\int_0^1\psi al_i(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & \text{当}\ i\neq 0,2^j\\ 1, & \phantom{\text{当}}\ i=0\end{cases},\quad b_{02^j}=\frac{1}{2^{j+1}}.\tag{15}$$

由于

$$\psi al_{2^n}(t)=\begin{cases}t-\frac{j}{2^{n-1}}, & \text{当}\ \frac{2j}{2^n}\leq t\leq\frac{2j+1}{2^n}\\ \frac{j+1}{2^{n-1}}-t, & \phantom{\text{当}}\ \frac{2j+1}{2^n}\leq t\leq\frac{2j+1}{2^n}\end{cases},\ j=0,1,\cdots,2^{n-1}-1\tag{16}$$

所以

$$b_{2^n,i}=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+j+1}}, & \text{当}\ i=2^j\quad(0\le j\le n-1)\\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2^{2n}}, & 3\le i\le 2^n-1,\ \text{但}\ i\ne 2^j\\ 0 & \end{cases},\quad b_{2^n,0}=\frac{1}{2^{n+1}},\ b_{2^n,2^n}=\frac{1}{3}\ \frac{1}{2^{2n}}\tag{17}$$

将 Δ_{2^n} 的第一行诸元素乘以 $-\frac{1}{2^{n+1}}$ 后加到第 2^n+1 行的对应元素上, 得

$$\Delta_{2^n}=\Delta_{2^n-1}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2^{2n}},$$

从而

$$\mu_{2^n2^n}=\sqrt{\Delta_{2^n-1}\Big\backslash\ \Delta_{2^n}}=\sqrt{3}\ 2^{n+1}\tag{18}$$

将 $\Omega_{2^n}(t)$ 按最后一列展开, 注意到 $\mu_{i2^n}=0\quad(i\ne 0,2^n)$. 于是由(14)式得

$$gal_{2^n}(t)=\sqrt{3}\ 2^{n+1}\Psi al_{2^n}(t)+\mu_{02^n}\Psi al_0(t).\tag{19}$$

由(19)和(7)知

$$S_{2^n-1}(\Psi al_{2^n},t)\equiv\text{常数}。$$

显然

$$S_{2^n-1}(\Psi al_{2^n},t)=\int\Psi al_{2^n}(t)\ gal_0(t)\,dt=b_{2^n0}=\frac{1}{2^{n+1}},$$

所以

$$gal_{2^n}(t)=\sqrt{3}\ 2^{n+1}[\Psi al_{2^n}(t)-S_{2^n-1}(\Psi al_{2^n},t)]=\sqrt{3}\ 2^{n+1}[\Psi al_{2^n}(t)-\frac{1}{2^{n+1}}].$$

将(16)式代入上式, 即得(12)式。

在上面的论证中, 作者没有用文献[8]中定理1的方法, 这是因为 $\Psi al_{k+1}(t)$ 的尖点并非总含有 $\Psi al_k(t)$ 的全部尖点, 所以$\{\sum_{i=0}^{k}a_i gal_i(t)\ \ a_i$ 为任意实数$\}$ 并不等于以 $gal_k(t)$ 的尖点为分划的折线多项式(见§4定义1)的全体, 但按 Toepler 定理[6], 如果 $f(t)\in L^2[0,1]$, 则

$$\|S_n(f,t)-(f,t)\|_2=\inf_{\{a_i\}}\left\|\sum_{i=0}^{n}a_i gal_i(t)-f(t)\right\|_2\tag{20}$$

因此, 如果已知折线多项式 $S_n(f,t)$ 的尖点位置, 则(20)式右边对 $\{a_i\}$ 取极值就转化为对尖点处函数值的全体求极值了。但 $gal_k(t)$ 的值已由(7)式给出。故对于已知的 $f(t)\in C[0,1]$, $S_n(f,t)$ 的尖点是已知的。此时与文献[8]中定理1类似, 对 $S_n(f,t)$ 在尖点处的值求导并令其为零, 即可得与文献[8]中定理1相似的结论, 即

$$\|S_n(f,t)\|_c\le 3\|f\|_c\tag{21}$$

上式对 $S_n(f,t)$ 具有水平边的情况也是成立的。再根据文献[9]中12页的一个推论, 得

引理1[8]　设 $f(t)\in L^p[0,1]$, $1\le p\le\infty$(这里 $L^\infty[0,1]$ 意指 $C[0,1]$), 则有

$$\|S_n(f,t)\|_p\le 3\|f\|_p,\ 1\le p\le\infty,\ n=1,2,3,\cdots.\tag{22}$$

式中 $\|f\|_p=[\int_0^1|f(t)|^p dt]^{\frac{1}{p}}$, $\|f\|_\infty$ 意指 $\|f\|_c=\max_{0\le t\le 1}|f(t)|$.

定理4　下述双边不等式成立:

$$\sqrt{3}\le\|gal_k(t)\|_c\le 8\sqrt{3},\ k=1,2,3,\cdots.\tag{23}$$

证　由(13)和(14)式知

$$gal_k(t)=\mu_{kk}\{\Psi al_k(t)-S_{k-1}(\Psi al_k,t)\}$$

于是由引理1得

$$\|gal_k(t)\|_p\leq 4\mu_{kk}\|\Psi al_k(t)\|_p,\ 1\leq p\leq\infty,\ k=1,2,3,\cdots. \tag{24}$$

首先估计 μ_{kk}, 设 $k=2^n+j$, $1\leq j\leq 2^n$. 由 Gram 行列式的性质[7]得

$$3\cdot 2^{2n+2}=\frac{G(\Psi al_{k-1})}{G(\Psi al_{k-1},\Psi al_k)}\leq\cdots\leq\frac{G(\Psi al_1,\cdots,\Psi al_{k-1})}{G(\Psi al_1,\cdots,\Psi al_k)}\leq\mu_{kk}^2=\frac{G(\Psi al_0,\cdots,\Psi al_{k-1})}{G(\Psi al_0,\cdots,\Psi al_k)}$$

$$\leq\frac{G(\Psi al_0,\cdots,\Psi al_k)}{G(\Psi al_0,\cdots,\Psi al_{k+1})}\leq\cdots\leq\frac{G(\Psi al_0,\cdots,\Psi al_{2^{n+1}-1})}{G(\Psi al_0,\cdots,\Psi al_{2^{n+1}})}=\mu^2_{2^{n+1}2^{n+1}}, \tag{25}$$

其中 $G(\Psi al_i)=(\Psi al_i,\Psi al_i)=\int\Psi al_i^2(t)\,dt$.

将(18)式代入(25)式, 得

$$\sqrt{3}k\leq\sqrt{3}\,2^{n+1}\leq\mu_{kk}\leq\sqrt{3}\,2^{n+2}\leq 4\sqrt{3}k,\ k=2^n+j,\ 1\leq j\leq 2^n,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{26}$$

其次容易算出

$$\|\Psi al_k(t)\|_p=(1+p)^{-\frac{1}{p}}\frac{1}{2^{n+1}},\ 1\leq p\leq\infty,\ k=2^n+j,\ 1\leq j\leq 2^n,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{27}$$

把(26)和(27)代入(24), 得

$$\|gal_k(t)\|_p\leq(1+p)^{-\frac{1}{p}}8\sqrt{3},\ k=3,4,5,\cdots. \tag{28}$$

特别当 $p=\infty$时, 有 $\|gal_k(t)\|_c\leq 8\sqrt{3},\ k\geq 3.$

而由(8)式可直接看出, 上式当 k=1, 2时显然成立。这就证明了(23)式的右边是成立的。

仍设 $k=2^n+j$, $1\leq j\leq 2^n$, 使 $\|gal_k(t)\|_2=1$, 而 $\|gal_k(t)\|_c$ 为最小, 则函数 $y=gal_k(t)$ 的图形在基本区间$(\frac{i-1}{2^{n+1}},\frac{i}{2^{n+1}})$或$(\frac{l-1}{2^n},\frac{l}{2^n})$上应有什么特征呢? 经计算知, 图形应是左、右(或上、下)对称的。即有

$$\|gal_k(t)\|_c\geq\|gal_{2^{n+1}}(t)\|_c=\sqrt{3},\ k\geq 3.$$

而当 k=1, 2时, 由(8)式和, 此时(23)式的左边显然成立, 从而(23)式左边对一切 $k\geq 1$成立。证毕。

3 逼近定理

定义1 设$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$是闭区间[0, 1]的一个分划, 若

$$\varphi(t)=\frac{\xi_i-\xi_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(t_i-t_{i-1})+\xi_{i-1},\ t_{i-1}\leq t\leq t_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{29}$$

则称 $\varphi(t)$ 是[0, 1]上的一个 n 次折线多项式(即以$\{t_i\}_0^n$为结点的一次样条函数)。

下面只考虑如下的分划 $\{t_i\}_0^n$:

$$t_0=0,\ t_i=t_i^{(j)}=\frac{2i-1}{2^{k_j+1}}\ (i=1,2,\cdots,2^{k_j};\ j=1,2,\cdots,p),\ t_n=1 \tag{30}$$

其中 $n-1$ 的二进位表示为 $2^{k_p}+2^{k_{p-1}}+\cdots+2^{k_1}$ $(k_p>k_{p-1}>\cdots>k_1\geq 0)$.

设 $f(t)\in C[0,1]$, $E_n(f)$ 表示用次数$\leq n$ 的折线多项式对连续函数 $f(t)$ 的最佳逼近[9], 其中$\{t_i\}$由(30)式给出。若有次数$\leq n$ 的折线多项式 $\varphi_0(t)$, 使得 $\|\varphi_0(t)-f(t)\|_c=E_n(f)$, 则称 $\varphi_0(t)$ 是 $f(t)$ 的最佳逼近 n 次折线多项式[9]。记次数$\leq n$ 的折线多项式全体为 Q_n. 由于分划 $\{t_i\}_0^n$未必包含分划$\{t_i\}_0^{n-1}$, 所以 $Q_n\leqq Q_{n-1}$. 于是 $E_n(f)$不一定单调下降(当 n 增大时)。但当 $n=2^m$ 时, 分划$\{t_i\}_0^n$必含有一切分划$\{t_i\}_0^k(k\leq n)$, 所以 $E_{2^m}(f)\leq E_k(f)$ (当 $k\leq 2^m$). 特别地,

$$E_{2^m}(f)\leq E_{2^{m-1}}(f)\leq E_{2^{m-2}}(f)\leq\cdots \tag{31}$$

定理5 设 $f(t)\in C[0,1]$, $\omega(f,\delta)$ 是它的连续模, 则

$$E_n(f)\leq 2\omega(f,\frac{1}{n}),\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{32}$$

证 在(29)式中令 $\xi_i=f(t_i)$, t_i 由(30)式给出, 则定理显然成立, 因为此时有 $0<t_i-t_{i-1}\leq\frac{1}{2^m}$. 注意: 当 $n=2^m$ 时, 由(30)式确定的 $\{t_i\}_0^n$, 其相邻两点间的距离都是 $\frac{1}{2^{m+1}}$, 故此时有

$$E_{2^m}(f)\leq\omega(f,\frac{1}{2^m}),\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{33}$$

定理6 设 $f(t)\in C[0,1]$, 则成立着

$$\|S_n(f,t)-f(t)\|_c\leq 8\omega(f,\frac{1}{n}),\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{34}$$

证 $n=1$ 时显然成立。设 $n=2^m+k$, $1\leq k\leq 2^m$, $m=0,1,2,\cdots$, 而 $\varphi_{2^m}(t)$ 是 $f(t)$ 的最佳逼近 2^m 次折线多项式, 则

$$\|S_n(f,t)-f(t)\|\leq\|\varphi_{2^m}-f(t)\|+\|S_n(f,t)-\varphi_{2^m}(t)\|=E_{2^m}(f)+\|S_n(f,t)-\varphi_{2^m}(t)\|.$$

由于当 $n=2^m$ 时, 分划(30)包含有一切分点组 $\{t_i\}_0^j$ $(j\leq n)$, 所以 $\varphi_{2^m}(t)=S_n(\varphi_{2^m},t)$. 于是 $S_n(f,t)-\varphi_{2^m}(t)=S_n(f-\varphi_{2^m},t)$, 由引理1得

$$\|S_n(f,t)-f(t)\|\leq E_{2^m}(f)+\|S_n(f-\varphi_{2^m},t)\|\leq 4E_{2^m}(f)\leq 4\omega(f,\frac{1}{2m})\leq 8\omega(f,\frac{1}{n}).$$

这里对 $E_{2^m}(f)$ 应用了不等式(33), 由于上式右端与 t 无关, 故(34)式成立。证毕。

推论1 空间 $C[0,1]$ 中任一函数 $f(t)$ 按标准正交系 $\{gal_n(t)\}$ 展开的 Fourier 级数在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(t)$.

推论2 若 $f(t)\in Lip\alpha(0<\alpha\leq 1)$, 则

$$\|S_n(f,t)-f(t)\|_c=O(n^{-\alpha}).$$

定义2 设 E 为实 Banach 空间, 若存在一列元素 $\{x_n\}$, 使得 E 中任一元素 x 可唯一地表示成 $x=\sum_n a_nx_n$, 式中诸 a_n 都是实数, 且这个级数是按 E 中的范数收敛于 x 的, 则称 $\{x_n\}$ 是 E 的广义 Schauder 基, 若还有 $\{x_n\}\subset E$, 则称此基为 E 的 Schauder 基。

已知, Franklin 函数系 $\{f_n(t)\}$ 是 $C[0,1]$ 的 Schauder 基[8], Haar 函数系 $\{x_m(t)\}$ 是 $C[0,1]$ 的广义 Schauder 基[1], 但它们在 $[0,1]$ 上都不是总体有界的。由定理6的推论1和定理4, 知函数系 $\{gal_k(t)\}$ 是 $C[0,1]$ 的总体有界的Schauder 基, 从而否定了 ½bГощ 猜想[4]。

定理7 设 $f(t)\in C[0,1]$, $a_n=\int_0^1 f(t)gal_n(t)\,dt$, 则

$$|a_n|\leq\frac{32}{3}\omega(f,\frac{1}{n}),\ n=1,2,3,\cdots. \tag{35}$$

证 $n=1$ 时是显然的。设 $n=2^m+k$, $1\leq k\leq 2^m$, $m=0,1,2,\cdots$. 则

$$|a_n|=|a_{2^m+k}|=\frac{|a_{2^m+k}gal_{2^m+k}(t_0)|}{|gal_{2^m+k}(t_0)|}\quad(t_0\in[0,1]\text{且}|gal_{2^m+k}(t_0)|=\|gal_{2^m+k}(t)\|_c)$$

$$\leq\frac{1}{3}[|f(t_0)-S_{2^m+k}(f,t_0)|+|f(t_0)-S_{2^m+k-1}(f,t_0)|]$$

$$\leq\frac{1}{3}16\omega(f,\frac{1}{2^m})\leq\frac{32}{3}\omega(f,\frac{1}{n}),$$

其中应用了(23)和(34)两式。证毕。

推论 若 $f(t)\in Lip\alpha$ $(0<\alpha\leq 1)$, 则 $a_n=O(n^{-\alpha})$.

引理2[8] 设 $\varphi(t)$ 是由(29)式所定义的 n 次折线多项式，而分点组 $\{t_i\}$ 由(30)式给出，则

$$\varphi'(t)\ {}_p \leq 8\ 2^m\ \varphi(t)\ {}_p,\ 1\leq p\leq\infty,\ n=2^m+k,\ 1\leq k\leq 2^m,\ m=0,1,2\cdots, \tag{36}$$

定理8 若 $f(t)\in C[0,1]$ 且 $E_n(f)=O(n^{-\alpha})$，$0<\alpha<1$，则 $f(t)\in \mathrm{Lip}\alpha$.

此定理的证明与三角多项式的情形类似，只须将经典的关于三角多项式导数模的¶Âż Ê Ä¶»¿不等式代之以(36)式中 $p=\infty$ 的情形。

推论 若 $f(t)\in C[0,1]$，则 $f(t)\in \mathrm{Lip}\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 的充要条件是

$$S_n(f,t)-f(t)\ {}_c=O(n^{-\alpha})$$

证 必要性要由定理6知，充分性由定理8推出

4 Lebesgue 函数

引理3[1] 设 $\{\omega_i(t)\}$ 是 $[a,b]$ 上的标准正交系，$L_n(t)$ 是它的 Lebesgue 函数(其含义见[4])，若有 $t_0\in[a,b]$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} L_n(t_0)=+\infty.$$

则必有 $f(t)\in C[a,b]$，使得 $f(t)$ 关于 $\{\omega_i(t)\}$ 的 Fourier 级数在 t_0 处发散。

由于 $[0,1]$ 上的标准正交系 $\{gal_k(t)\}$，$\{x_m(t)\}$ 和 $\{f_n(t)\}$ 都是空间 $C[0,1]$ 的(广义) Schuader 基，所以由引理3及反证法，即得如下推论。

推论 标准正交系 $\{gal_k(t)\}$，Haar 系 $\{x_m(t)\}$ 和 Franktin 系 $\{f(t)\}$ 的 Lebesgue 函数组

$$L_n^{(G)}(t)=\int\ \sum_{n=0}^{n} gal_k(s)\,gal_k(t)\ \mathrm{d}s=\int\ K_n^{(G)}(s,t)\ \mathrm{d}s,$$

$$L_n^{(H)}(t)=\int\ \sum_{n=1}^{n}\chi_k(s)\chi_k(t)\ \mathrm{d}s,\quad L_n^{(F)}(t)=\int\ \sum_{n=0}^{n} f_k(s)f_k(t)\ \mathrm{d}s$$

在 $[0,1]$ 上都是总体有界的。

$\{L_n^{(G)}(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界的结论，推翻了 ½³ ±À³[4] 的另一个猜想。

关于 $L_n^{(H)}(t)$ 有下述更准确的结果。

定理9 $L_n^{(H)}(t)\equiv 1,\ 0\leq t\leq 1,\ n=1,2,3,\cdots.$ (38)

证 由文献[10]对积分核 $K_n^{(H)}(s,t)=\sum_{i=1}^{n} x_i(s)x_i(t)$ 的取值分析，知 $K_n^{(H)}(s,t)\geq 0$，所以

$$L_n^{(H)}(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k(t)\int x_k(s)\,\mathrm{d}s=x_0(t)\equiv 1,$$

这是因为 $$\int x_k(s)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}1, & 当\ k=0\\ 0 & k>0\end{cases}$$

5 正交级数

引理4[11] 设函数列 $\{x_n(t)\}\subset L^2[a,b]$ 且

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} J_{mn}=0. \tag{37}$$

则当 $n\to\infty$ 时，$x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛，式中 $J_{mn}=\int G_{mn}(t)\,\mathrm{d}t$，$G_{mn}(t)=$

$\max\{ x_{m+1}(t) - x_m(t) , x_{m+2}(t) - x_m(t) , \cdots, x_n(t) - x_m(t) \}$.

定理10　设实数列 C_k 满足条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 < +\infty, \tag{38}$$

则正交级数 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k \mathrm{gal}_k(t)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处收敛。

证　设 $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k \mathrm{gal}_k(t) \subset L^2[0, 1]$

$G_{mn}(t) = \max\{ x_{m+1}(t) - x_m(t) , x_{m+2}(t) - x_m(t) , \cdots, x_n(t) - x_m(t) \} = \epsilon(t) \sum_{k=m+1}^{\lambda(t)} C_k \mathrm{gal}_k (t)$,

这里 $\epsilon(t) = \pm 1$, $m + 1 \leq \lambda(t) \leq n$.

于是

$$C_i = \int_0^1 X(t) \mathrm{gal}_i(t) \mathrm{d}t,\ m + 1 \leq i \leq n,\ X(t) = \sum_{k=m+1}^{n} C_k \mathrm{gal}_k(t).$$

所以

$$\begin{aligned} J_{mn} &= \int_0^1 \epsilon(t) \sum_{k=m+1}^{\lambda(t)} C_k \mathrm{gal}_k(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 \epsilon(t) \sum_{k=m+1}^{\lambda(t)} \left[\int_0^1 X(s) \mathrm{gal}_k(s) \mathrm{d}s \right] \mathrm{gal}_k(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 X(s) \mathrm{d}s \int_0^1 \epsilon(t) \sum_{k=m+1}^{\lambda(t)} \mathrm{gal}_k(s) \mathrm{gal}_k(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 X(s) \mathrm{d}s \int_0^1 \epsilon(t) [K_{\lambda(t)}^{(G)}(s, t) - K_m^{(G)}(s, t) \mathrm{d}t]. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} J_{mn} &\leq \int_0^1 X(s) \mathrm{d}s \int_0^1 \epsilon(t) [K_{\lambda(t)}^{(G)}(s, t) - K_m^{(G)}(s, t)] \mathrm{d}t \\ &\leq \left[\int_0^1 X^2(s) \mathrm{d}s \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 K_{\lambda(t)}^{(G)}(s, t) \mathrm{d}t + \int_0^1 K_m^{(G)}(s, t) \mathrm{d}t \right] \\ &= \left(\sum_{k=m+1}^{n} C_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} O(1) = o(1) \quad O(1) = o(1) \quad (m \to \infty, n \to \infty), \end{aligned}$$

式中 $o(1)$ 表示无穷小量, $O(1)$ 表示有界量, 且应用了条件(38) 和引理3 的推论及积分的布尼亚柯夫斯基不等式, 最后由引理4知正交级数$\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k \mathrm{gal}_k(t) \right)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处收敛。证毕。

推论1　正交函数系 $\{\mathrm{gal}_k(t)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的一个收敛系(其含义见[4])。

注意到三角函数系 $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ 也是总体有界 的正交系, 且由 Carleson 定理[12] 知它是 $[-\pi, \pi]$ 上的一个收敛系。故在这两个方面, 函数系 $\{\mathrm{gal}_k(t)\}$ 与三角系有类似之处。

推论2　设 $f(t) \in L^2[0, 1]$, 则 $S_n(f, t)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处收敛于 $f(t)$.

证　设 $C_k = \int_0^1 f(t) \mathrm{gal}_k(t) \mathrm{d}t$. 因为 $\{\mathrm{gal}_k(t)\}$ 是完备的正交系, 故它封闭, 即 Parseval 封闭公式成立

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 = \int_0^1 f(t) ^2 \mathrm{d}t < +\infty$$

于是由定理10,知 Fourier 级数$\sum_{k=0}^{\infty} C_k gal_k(t)$在[0, 1]上几乎处处收敛。再由 Riesz-Fischer 定理,知它必几乎处处收敛于$f(t)$. 证毕。

参 考 文 献

1 Kaczmarz S, Steinhaus H. Theorie der Orthogonalreihen. Warsaw-Lwow. 1935. 50, 154

2 Franklin P. A set of continuous orthogonal functions. Math Ann, 1928, 100: 522～529

3 Ciesielski Z. A bounded orthonormal System of polynomials. Studia Math, 1968, 31: 340～346

4 ½³ Ñ¿À³ . ¶Ê ¶¿¿Í ¶ º ¿¶Â¶Ê ¶¿¿Í ¶ ÁÂÀ²½¶¼Í Ä¶ÀÂºº ÄÂº´À¿À¾¶ÄÂº É¶Ã¼º Ç º ÀÂÄÀ´À¿±½Î¿ÍÇ ÂÑµÍ. ÃÁ¶Çº Ä¶¾. Å¼± 1964, 19: 3～69.

5 郑维行, 苏维宜, 任福贤. 沃尔什函数理论与应用. 上海: 上海科技出版社, 1983. 11, 44, 46, 54, 104

6 纳唐松 . 函数构造论(中). 何旭初, 唐述钊译, 北京: 科学出版社, 1958. 21, 30

7 关肇直. 泛函分析讲义. 北京: 高等教育出版社, 1958. 118, 134

8 Cleslelski Z. Properlies of the orthonormal Franklin system. Studia Math. 1963(1), 23: 141～157

9 洛伦茨 G. G, 函数逼近论. 谢庭藩, 施咸亮译. 上海: 上海科技出版社, 1981. 21

10 Alexits G. Convergence problemls of orthogonal series Budapest, 1961. 47

11 Åº . Âº´À¿À¾¶ÄÂº É¶Ã¼º ¶ ÂÑµÌ. ÀÃ¼³ ± º¹¾Ä´º¹: 1961, 332

12 Carleson L. On convergence and growth of partialsums of Fourier series. Acta Math, 1966(1～2), 116, 135～157

A new Schauder Basis of the Space C[0, 1]

Chai boqi

(Wuxi University of light industry, Wuxi, 214036)

Abstract In this paper we introduced a new orthonormal system $\{gal_k(t)\}_0^\infty$ and proved that it is uniformly bounded in [0, 1] and is the Schauder basis of the space C[0, 1]. At the same time we proved the Lebesgue functions of $\{gal_k(t)\}$ is uniformly bounded in [0, 1] and the system $\{gal_k(t)\}$ is a convergence system.

Key words orthonormal system; best approximation; schauder basis; lebesgue functions; convergence system

(责任编辑: 秦和平)