

关于变上限积分 $\int_0^x f(t) dt$ 在 $x = 0$ 点的右导数

柴伯琪

(无锡轻工大学数理学科部, 无锡 214036)

摘要 推广了变上限积分在 $x = 0$ 点右导数存在和不存在的充分条件.

关键词 交错级数; 广义积分; 渐近积分; Cauchy 积分判别法

分类号 O13

0 引言

文 [1] 提出了变上限积分 $\int_0^x f(t) dt (x > 0)$ 在 $x = 0$ 点的右导数问题, 其中 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在. 文 [2] 得到了该右导数为零的一个充分条件. 本文作者推广了这个充分条件, 并得到了该右导数不存在或等于任意值 A 的充分条件, 且顺便指出了文 [2] 中的一处错误.

1 右导数为零的情形

定理 1 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $f(x)$ 满足如下条件:

- 1) 在区间 $(0, a](a > 0)$ 上连续;
- 2) 有无穷多个零点 $x_n: 0 < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_2 < x_1 \leq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 且存在正常数 K ,

使得

$$\begin{aligned} & \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq K, n = 1, 2, 3, \cdots; \\ & 3) \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt \int_{x_{n+2}}^{x_{n+1}} f(t) dt < 0, \left| \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt \right| \geq \left| \int_{x_{n+2}}^{x_{n+1}} f(t) dt \right|, n = 1, 2, 3, \cdots; \\ & 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

则 $F'_+(0) = 0$.

证 首先注意到, 由于 $x_n \rightarrow 0$, 因此条件 4) 蕴含了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt = 0$. 再由条件 3) 知, 级数 $\sum_n \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt$ 是 Leibniz 型的交错级数, 它是收敛的, 且其和的绝对值小于首项的绝对值, 由此易知: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 总可找到 $N > 0$, 使得当 $0 < Z < W, 0 < Z' < W$ 时, 一定有

收稿日期: 1997-09-15

第一作者: 柴伯琪, 男, 1944 年 5 月生, 副教授

$$\left| \int_Z^Z f(t) dt \right| < X$$

于是当 $f(x)$ 在 $x=0$ 的右侧无界时, 由无界函数广义积分存在的一个普遍条件 [3] 知广义积分 $\int_0^a f(t) dt$ 收敛, 且

$$\int_0^a f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt \quad (\text{其中 } x_0 = a). \quad (2)$$

对任意小的正数 ε , 设 $x_N \leq x < x_{N+1}$, 则

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) dt \right| &= \left| \sum_{n=N}^{\infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt + \int_{x_N}^x f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt \right| + \left| \int_{x_N}^x f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_{N+1}}^{x_N} f(t) dt \right| + \left| \int_{x_N}^{x_{N+1}} f(t) dt \right| \end{aligned}$$

因此, 由条件 2) 和 4) 得

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right| &\leq \left| \frac{1}{x_N} \int_{x_{N+1}}^{x_N} f(t) dt \right| + \frac{x_{N+1}}{x} \cdot \left| \frac{1}{x_{N+1}} \int_{x_N}^{x_{N+1}} f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x_N} \int_{x_{N+1}}^{x_N} f(t) dt \right| + K \cdot \left| \frac{1}{x_{N+1}} \int_{x_N}^{x_{N+1}} f(t) dt \right| \rightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

即 $F'_+(0) = 0$.

定理 1 是文 [2] 中定理的推广. 因为由文 [2] 中定理的条件 1) 和 3) 可推出 (1) 式和条件 4).

例 1 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t^{-\alpha}}{t} dt, \alpha > 0$, 求 $F'_+(0)$.

解 被积函数的零点为 $x_n = (n^c)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (n = 1, 2, \dots), x_n \rightarrow 0$, 且

$$\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt \stackrel{t^{-\alpha} = u}{=} \frac{1}{\alpha} \int_{n^c}^{(n+1)^c} \frac{\sin u}{u^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}}} du,$$

故定理 1 的条件全部满足, 所以 $F'_+(0) = 0$.

对于 $G(x) = \int_0^x \frac{\cos t^{-\alpha}}{t} dt, \alpha > 0$. 被积函数的零点为 $x_n = (\pi - \frac{c}{2})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (n = 1, 2, \dots)$, 定理 1 的条件也全部满足, 所以 $G'_+(0) = 0$.

例 2 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin e^{\frac{1}{t}}}{t} dt, T$ 为已知实常数, 求 $F'_+(0)$.

解 被积函数之零点为 $x_n = \frac{1}{\ln(n^c)} \quad (n = 1, 2, \dots), x_n \rightarrow 0$ 且

$$\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt \stackrel{e^{\frac{1}{t}} = u}{=} \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{(\ln u)^{2-\frac{1}{\alpha}}} \frac{\sin u}{u} du,$$

由此可知定理 1 的条件全部满足, 所以 $F'_+(0) = 0$.

若 $G(x) = \int_0^x \frac{\cos e^{\frac{1}{t}}}{t} dt$, 则同样有 $G'_+(0) = 0$.

2 右导数不存在的情形

例 3 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t^{-\alpha}}{t} dt, \alpha > 0$, 求 $F'_+(0)$.

解 先设 $\alpha = \frac{1}{n}$, 此时被积函数的零点为 $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ($n = 1, 2, \dots$), 于是

$$F(x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\sin \frac{1}{t}}{t} dt = \int_{\frac{1}{x_n}}^{\frac{1}{0}} \frac{\sin u}{u} du \sim \int_{\frac{1}{x_n}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \sim \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \quad (x \text{ 充分大}),$$

其中作者利用了已知的渐近展开 [4]

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \sim \frac{1}{x} \cos x \quad (x \text{ 充分大}).$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$, 它不存在, 故 $F'_+(0)$ 不存在.

对于 $\forall \alpha > 0$ 的一般情况, 利用已知的渐近展开 [5]

$$\int_x^{+\infty} t^{\alpha-1} \sin t dt \sim x^{\alpha-1} \cos x \quad (x \text{ 充分大}).$$

得
$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t^{-\alpha}}{t} dt = \frac{t^{-\alpha} = u}{\alpha} \frac{1}{x^{-\alpha}} \int_{x^{-\alpha}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}}} du \sim \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}} \cos \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0^+).$$

于是 $F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x}$, 它不存在.

同样, 若 $G(x) = \int_0^x \frac{\cos t^{-\alpha}}{t} dt$, $\beta \geq \alpha > 0$, 则 $G'_+(0)$ 不存在.

定理 2 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $f(x)$ 满足如下条件:

1) 在区间 $(0, a]$ 上连续 ($a > 0$);

2) 有无穷多个零点 $x_n: 0 < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_2 < x_1 \leq a$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$;

3) $\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt \int_{x_{n+2}}^{x_{n+1}} f(t) dt < 0$, $|\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt| \geq |\int_{x_{n+2}}^{x_{n+1}} f(t) dt|$, ($n = 1, 2, \dots$)

且
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt = 0 \quad (3)$$

4) 存在正常数 M_1, M_2 , 使得

$$|\int_0^{x_n} f(t) dt| \geq M_1 |\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt|, \quad |\frac{1}{x_n} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt| \geq M_2, \quad n = 1, 2, \dots.$$

则 $F'_+(0)$ 不存在.

证 由定理 1 的证明知, 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的右侧无界时, 条件 3) 保证了广义积分 $\int_0^a f(t) dt$ 是收敛的, 且此时 (2) 式成立, 所以

$$F(x_n) = \int_0^{x_n} f(t) dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{x_{k+1}}^{x_k} f(t) dt.$$

上式右端的级数是 Leibniz 型交错级数, 故 $F(x_n)$ 的符号与第一项 $\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt$ 相同. 由条件

3), 它是正负交替的. 因为 $x_n > 0$, 故 $\frac{1}{x_n} F(x_n)$ 的符号也是正负交替的. 另一方面, 由条件 4) 知

$$|\frac{1}{x_n} F(x_n)| \geq M_1 |\frac{1}{x_n} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t) dt| \geq M_1 M_2 > 0$$

这说明 $\frac{1}{x_n} F(x_n)$ 的值在区间 $(-b, b)$ 之外振荡 ($b \geq M_1 M_2$), 所以 $F'_+(0)$ 不存在.

例 4 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin \ln t}{t^\alpha} dt$, $0 < \alpha < 1$, 求 $F'_+(0)$.

解 被积函数的零点为 $x_n = e^{-\pi} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. 容易算出广义积分

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt = \frac{(-1)^{n-1} e^{-\pi(1-\frac{1}{n})}}{1 + (1-\alpha)^2} [1 + e^{-\pi(1-\alpha)}] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\int_0^{x_n} f(t) dt = \frac{(-1)^{n-1} e^{-\pi(1-\frac{1}{n})}}{1 + (1-\alpha)^2}.$$

由此知定理 2 的 4 个条件全部满足 (且可取 $M_1 = \frac{1}{e^{-\pi(1-\frac{1}{n})}}, M_2 = \frac{e^{\pi T}}{1 + (1-\frac{1}{n})^2}$), 故 $F'_+(0)$ 不存在.

同样, 若 $G(x) = \int_0^x \frac{\cos \ln t}{t^\alpha} dt, 0 < \alpha < 1$, 则 $G'_+(0)$ 不存在.

3 右导数等于 A 的情形

定理 3 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 被积函数 $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上连续且不变号, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在 (但

$\neq \infty$), 若广义积分 $\int_0^a f(x) dx$ 存在且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt = A \quad (A \text{ 也可以为 } \infty),$$

则 $F'_+(0) = A$.

证 为明确起见, 不妨设 $f(x) \geq 0$, 设 $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$, 则

$$\frac{n}{n+1} \cdot (n+1) \int_0^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt = n \int_0^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq (n+1) \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt = \frac{n+1}{n} \cdot n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt,$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上式左、右两边同时趋于 A , 故 $F'_+(0) = A$.

例 5 设 $F(x) = \int_0^x \frac{|\sin t^{-\alpha}|}{t^\beta} dt, G(x) = \int_0^x \frac{|\cos t^{-\alpha}|}{t^\beta} dt, \alpha > 0, \beta < 1$, 求 $F'_+(0), G'_+(0)$.

解 由例 3 知 $F(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{x^{-1}}^{+\infty} \frac{|\sin u|}{u^{1+\frac{1-\beta}{\alpha}}} du$, 当 $T > 0, U < 1$ 时, 此广义积分收敛.

现在设 $\pi < x^{-\alpha} \leq (n+1)\pi$, 则当 $\epsilon > 1$ 时,

$$\frac{2}{(\epsilon-1)\pi^\epsilon n^{-\epsilon}} < \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^\epsilon} < \int_{n^\epsilon}^{+\infty} \frac{|\sin u|}{u^\epsilon} du < \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^\epsilon} < \frac{2}{(\sigma-1)\pi^\sigma (n-1)^{\sigma-1}}.$$

这可用双边的 Cauchy 积分判别法而得. 于是

$$\frac{1}{x} F(x) = \frac{1}{\alpha} (\pi)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\frac{2}{1-\beta} \cdot \frac{1}{\pi^{1+\frac{1-\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} + O(n^{-1-\frac{1-\beta}{\alpha}}) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \text{当 } \beta = 0. \\ +\infty, & \alpha < \beta < 1. \end{cases}$$

对 $G(x)$ 有类似的等式, 故

$$G'_+(0) = F'_+(0) = \begin{cases} 0, & \text{当 } U < 0, \\ \frac{2}{c}, & U \geq 0, \\ +\infty & 0 < U < 1 \end{cases} \quad (5)$$

又, 若置 $H(x) = \int_0^x \frac{|\sin e^t|}{t^\beta} dt, I(x) = \int_0^x \frac{|\cos e^t|}{t^\beta} dt, U < 1$, 则也有 $H'_+(0) = I'_+(0) = F'_+(0)$.

(0).

上例中 $U \geq 0$ 时的 $F(x)$ 就是文 [2] 中的例 3, 文 [2] 认为此时 $F'_+(0)$ 不存在, 这是不对

的。文 [2] 中在估计积分

$$\int_0^{x_n} |\sin t|^{-\alpha} dt = \frac{1}{T} \int_{n^c}^{(n+1)^c} \sum_{k=0}^{\infty} (u+i^c)^{-1-\frac{1}{T}} |\sin u| du = |\sin C| (\pi)^{-\frac{1}{T}}, \quad n^c < C < (n+1)^c$$
时,应用了中值定理后说 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sin C|$ 不存在,这是错误的,因为中值 C 只是区间 $(\pi, (n+1)\pi)$ 中的一个或几个值。

如果 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上有界可积且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = A$ (它可以是定号的无穷大),则显然有 $F'_+(0) = A$ 。例如 $F(x) = \int_0^x t \lfloor \frac{1}{t} \rfloor dt$, $\lfloor x \rfloor$ 是取整运算,则 $F'_+(0) = 1^{[6]}$ 。

参 考 文 献

1 John Klippert. On the right hand derivative of a certain integral function Amer Math Monthly, 1991, (8): 751~ 752
2 睦润生. $\int_0^x \sinh(t) dt$ 在 $x=0$ 的右导数. 纺织基础科学学报, 1993, (4): 375~ 378
3 菲赫金哥尔茨 Г.М. 微积分学教程 (第二卷, 第三分册). 徐献瑜, 冷生明, 漆文骥等译. 北京: 高等教育出版社, 1954. 512
4 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京科学出版社, 1979. 339~ 380
5 爱尔台里 A. 高级超越函数 (第二册). 张致中译. 上海: 上海科技出版社, 1958. 151~ 167
6 强文久, 李元章, 黄雯荣. 数学分析的基本概论与方法. 北京: 高等教育出版社, 1989. 151, 193

On the Right Hand Derivative at $x = 0$ of the Variable Upper
Limit Integral $\int_0^x f(t) dt$

Chai Boqi

(Dept. of Math. and Phy. Sci., Wuxi University of Light Industry, Wuxi, 214036)

Abstract In this paper we generalize the sufficient conditions under which the right hand derivative of the variable upper limit integral $\int_0^x f(t) dt$ is existence at $x=0$.

Key words alternating series; improper integral; asymptotic expansion; Cauchy's integral test

(责任编辑: 秦和平)