

二阶 Lagrange 中值定理的中值的变化趋势

刘 琪

(无锡轻工大学数理学部, 无锡, 214036)

摘要 分别在 $f_+'''(a) \neq 0$, $f_+'''(a) = 0$, $f_+'''(a) = \infty$ 的情况下, 研究了二阶 Lagrange 中值定理的中值的变化趋势.

关键词 二阶 Lagrange 中值定理; 中值; 变化趋势

分类号 O241.4

0 前 言

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可微, 那末在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = f''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad (1)$$

这是二阶 Lagrange 中值定理, 它是 Lagrange 中值定理的推广^[1].

文 [2, 3] 研究了 Lagrange 中值定理的中值的变化趋势. 关于二阶 Lagrange 中值定理的中值的变化趋势的研究尚未见报导. 在本文中, 作者参考文 [2~4] 的处理方法, 分别在 $f_+'''(a) \neq 0$, $f_+'''(a) = 0$, $f_+'''(a) = \infty$ 的情况下, 对二阶 Lagrange 中值定理的中值的变化趋势作较深入的研究.

1 $f_+'''(a) \neq 0$ 的情形

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $[a, b)$ 内三阶可微, $f'''(x)$ 在 $x = a$ 处右连续, 且 $f_+'''(a) \neq 0$, 那末 (1) 式中的 ξ 有

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{a-b}{b-a} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

证 考虑极限
$$I = \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) - \frac{1}{4}f''(a)(b-a)^2}{(b-a)^3}$$

一方面, 由 L'Hospital 法则有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f'(b) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}f''(a)(b-a)}{3(b-a)^2} = \\ &= \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f''(b) - \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}f''(a)}{6(b-a)} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \lim_{b \rightarrow a} \left[f'''(b) - \frac{1}{4} f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] = \frac{1}{8} f_+'''(a) \quad (3)$$

另一方面,由(1)式有

$$I = \lim_{b \rightarrow a} \frac{\frac{1}{4} f''(a) (b-a)^2 - \frac{1}{4} f''(a) (b-a)^2}{(b-a)^3} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow a} \frac{f''(a) - f''(a)}{a-a} \lim_{b \rightarrow a} \frac{a-a}{b-a} = \frac{1}{4} f_+'''(a) \lim_{b \rightarrow a} \frac{a-a}{b-a} \quad (4)$$

(3)式和(4)式相等,即得(2)式.

2 $f_+'''(a) = 0$ 的情形

当 $f_+'''(a) = 0$ 时定理 1 结论不一定成立. 如对 $f(x) = x^4$ 在 $[0, b]$ 上使用(1)式,有

$$b^4 - 2 \left(\frac{b}{2} \right)^4 = 12a^2 \cdot \frac{b^2}{4}, \lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \frac{7}{24} \neq \frac{1}{2}. \text{ 这是因为 } f_+'''(0) = 0.$$

定理 2 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $[a, b]$ 内 $n+1$ 阶可微, $f^{(n+1)}(x)$ 在 $x=a$ 处右连续, 且 $f_+^{(i)}(a) = 0$ ($i = 3, 4, \dots, n$), $f_+^{(n+1)}(a) \neq 0$, 那末(1)式中的 ξ 有

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a-a}{b-a} = \left[\frac{4}{n(n+1)} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (5)$$

证 由 Taylor 公式

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a_1)(b-a)^{n+1} \quad (a < a_1 < b)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f'(a) \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} f''(a) \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a_2) \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \quad \left[a < a_2 < \frac{a+b}{2} \right]$$

$$f''(a) = f''(a) + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n+1)}(a_3)(a-a)^{n-1} \quad (a < a_3 < a)$$

代入(1)式,有

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a_1)(b-a)^{n+1} - \frac{2}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a_2) \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n+1)}(a_3)(a-a)^{n-1} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\text{即} \left(\frac{a-a}{b-a} \right)^{n-1} = \frac{4}{n(n+1)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(a_1) - \frac{1}{2} f^{(n+1)}(a_2)}{f^{(n+1)}(a_3)}, \text{令 } b \rightarrow a, \text{即得(5)式.}$$

3 $f_+'''(a) = \infty$ 的情形

当 $f_+'''(a) = \infty$ 时定理 1 结论不一定成立. 如对 $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ 在 $[0, b]$ 上使用(1)式,有

$$b^{\frac{5}{2}} - 2 \left(\frac{b}{2} \right)^{\frac{5}{2}} = \frac{15}{4} a^2 \left(\frac{b}{2} \right)^2, \lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \left[\frac{16}{15} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \neq \frac{1}{2}. \text{ 这是因为 } f_+'''(0) = \infty.$$

设 $h(x)$ 在 $x=a$ 的右邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow a^+} [h(x) - h(a)] / (x-a)^T$ (T 是 $(0, 1]$ 的某实数) 存在, 则称这极限值为 $h(x)$ 在 $x=a$ 处的 T 导数, 记作 $D^T h(a)$. 显然 $D^1 h(a)$ 即 $h'(a)$, 而当 $D^T h(a)$ (T 是 $(0, 1)$ 内的某实数) 存在时, $h'(a)$ 可能不存在.

定理 3 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $[a, b]$ 内二阶可微, $D^T f''(a)$ 存在且不等于零, 那末 (1) 式中的 ξ 有

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a-b}{b-a} = \left[\frac{4}{(1+T)(2+T)} \left(1 - \frac{1}{2^{1+T}} \right) \right]^{\frac{1}{T}} \quad (6)$$

证 由广义 Taylor 公式^[4],

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 + \\ &\quad \frac{D^T f''(a)}{(1+T)(2+T)} (b-a)^{2+T} + o[(b-a)^{2+T}] \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + f'(a) \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} f''(a) \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \\ &\quad \frac{D^T f''(a)}{(1+T)(2+T)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2+T} + o\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2+T}\right] \\ f''(a) &= f''(a) + D^T f''(a)(a-a)^T + o[(a-a)^T] \end{aligned}$$

代入 (1) 式, 令 $b \rightarrow a$, 即得 (6) 式. 类似地可证下列定理.

定理 4 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $[a, b]$ 内 n 阶可微, $f^{(i)}(a) = 0$ ($i = 3, 4, \dots, n$), $D^T f^{(n)}(a)$ 存在且不等于零, 那末 (1) 式中的 ξ 有

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a-b}{b-a} = \left[\frac{4}{(n+T-1)(n+T)} \left(1 - \frac{1}{2^{n+T-1}} \right) \right]^{\frac{1}{n+T-2}}$$

关于 n 阶 Lagrange 中值定理的中值的变化趋势可以仿照本文类似地进行研究.

参 考 文 献

- 1 李元中, 冯汉桥. 高阶哥西中值定理. 高等数学, 1987, (1)
- 2 张广梵. 关于微分中值定理的一个注记. 数学的实践和认识, 1988(1): 87~89
- 3 尹旭日. $b \rightarrow a$ 时拉格朗日中值定理中 ξ 的变化趋势. 工科数学, 1988(4): 77~78
- 4 孙燮华. 关于 Taylor 公式的推广及其应用. 数学的实践和认识, 1995(4): 86~89

Asymptotic State of the Mean Value for the Second-Order Lagrange Mean Value Theorem

Liu Qi

(Dept. of Math & Phys. Sci. Wuxi University of Light Industry, Wuxi, 214036)

Abstract When $(1)f_+'''(a) \neq 0$, $(2)f_+'''(a) = 0$, $(3)f_+'''(a) = \infty$, the asymptotic state of the mean value for the second-order Lagrange mean value theorem is respectively studied in this paper.

Key words second-order Lagrange mean value theorem; mean value; asymptotic state

(责任编辑: 秦和平)