

文章编号 :1009-038X(2000)01-0093-02

关于拟环和拟群的一些研究^{*}

朱 平

(无锡轻工大学计算科学与信息传播系 ,江苏无锡 214036)

摘 要 :利用拟群建立了一类新的特殊环——拟环 ,讨论其特征与结构 ,得出了相关于拟群的一系列结论 .

关键词 :拟群 ,拟环 ,最大子体 ,幂零扩张

中图分类号 :O152.7 ;O153.3 文献标识码 : A

Some Study on Quasi-ring and Quasi-group

ZHU Ping

(Department of Computation Science & Information Communication ,
Wuxi University of Light Industry ,Wuxi 214036)

Abstract : In this paper ,the author establishes a kind of special ring——the quasi-ring by using quasi-group , then studies its characteristics and structure , at the same time , obtains a series of results about quasi-group .

Key words : quasi-group ,quasi-ring ,the greatest division subring ,nil-extension

称半群 S 关于乘法运算为正则(拟正则)的^[1] ,
如果关于任意 $a \in S$,存在 $x \in S$ (存在 $n \in \mathbb{N}$, $x \in S$) ,使得 $axa = a$ ($a^n x a^n = a^n$) .

定义 1 半群 S 称为拟群 ,如果 S 为拟正则的 ,且
幂等元唯一^[2] .

以下文中 ,若 S 表示半群 ,则 $\text{Reg}S$ 表示其正则
元集 , E_S 表示其幂等元集 .

引理 1 令 S 为拟群 ,则下列各款等价^[2] :

- 1) S 含零元 ;
- 2) S 为 幂零元半群 ;
- 3) $\text{Reg}S = E_S$.

定义 2 称环 $(R, +, \cdot)$ 为幂零元环^[3] ,如果
 $\forall a \in R [\exists n \in \mathbb{N} (a^n = 0)]$

本文的重点是利用拟群给出一类特殊环的定义 .

定义 3 称 $(R, +, \cdot)$ 为拟环 ,如果 $R \setminus \{0\}$ 非空 ,且
满足 :

- 1) $(R, +)$ 为加群 ;
- 2) $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ 为拟群 ;
- 3) $\forall a, b, c \in R ;$
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
且 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

注 1 据 $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$,知 0 是正则元 .

注 2 拟环显然是环 .

注 3 若将 2) 改成 $(R, \cdot)$ 为拟群 ,则由引理 1 ,
 $(R, \cdot)$ 为幂零元半群 ,从而 $(R, +, \cdot)$ 为幂零元环 .

^{*} 收稿日期 :1999-05-06 ;修订日期 :1999-11-14 .

作者简介 :朱平 (1962 年 9 月生) ,女 ,安徽巢湖人 ,理学学士 ,副教授 .
万方数据

注 4 据 $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ 为拟群, 当 $\text{Reg}R = E_R$ 时 $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ 亦为幂零元半群, 但此时 e 是拟群 $R \setminus \{0\}$ 的幂等元而不是 R 中的 0.

注 5 既使 R 为拟环, R_1 为其子环, R_1 亦未必为拟环.

例 $(Q, +, \cdot)$ 为体, 从而为拟环 $(Z, +, \cdot)$ 为其子环, 但非拟环, 其中 Q 和 Z 分别是有理数集和整数集, “+”和“ $\cdot$ ”为普通加法和乘法.

命题 1 若拟环 R 含么元 I_R , 则 R 为体.

证明 若拟环 R 含么元 I_R , 则 $I_R \in E_R$, 又 $|E_R| = 1$, 从而

$$\begin{aligned} \forall a \in R [\exists x \in R, m \in N (a^m x = x a^m = I_R)] \\ \Rightarrow a = a \cdot I_R = a \cdot a^n x = a \cdot x a^n = a \cdot x a^{n-1} \cdot a \\ \Rightarrow a \in \text{Reg}R, \end{aligned}$$

即 $(R, \cdot)$ 为正则的, 且幂等元唯一, 从而为群.

综上, 证得含么元拟环为体.

引理 2 拟群 S 的正则元集 $\text{Reg}S$ 为其子群^[2].

称 a 为环 R 的零因子, 如果存在 $b (\neq 0) \in R$ 使得 $ab = ba = 0$, 非零环的零元是当然的零因子.

命题 2 若拟环 R 不含零因子, 则 R 为体.

证明 $\forall a, b, c \in R$, 若 $ab = ac$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0 \quad (\text{若 } a \neq 0) \\ \Rightarrow b = c. \end{aligned}$$

即消去律满足, 又据 R 为拟正则的, 有

$$\begin{aligned} \forall a \in R, a^n x a^n = a^n \Rightarrow a^{n-1} \cdot a x a^n = a^{n-1} a \\ \Rightarrow a x a^n = a \Rightarrow a(x a^{n-1}) a = a \\ \Rightarrow a \text{ 正则} \Rightarrow (R \setminus \{0\}, \cdot) \text{ 为群} \\ \Rightarrow (R, +, \cdot) \text{ 为体}. \end{aligned}$$

定理 1 令 R_1, R_2 为环 R 的子环, 若 R_1, R_2 为拟环, 则 $R_1 \cap R_2$ 为拟环.

定理 2 设 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 为环 R 的子环. 则 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 为拟环当且仅当 $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ 为拟环.

定理 3 任意整环 R 存在扩张体 S , 即任一体有嵌入子环^[3].

引理 3 拟群 S 的正则元集 $\text{Reg}S$ 为 S 的理想^[2].

定理 4 令 R 为拟环, 则 $\text{Reg}R$ 为其最大子体.

证明 据 R 为拟环知 $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ 为拟群, 从而由

参考文献

[1] BOGDANOVIC S. Semigroups with a system of subsemigroups[M]. Novi Sad, 1985. 1

[2] 朱平. 拟群[J]. 居巢学刊, 1989(1): 10~15

[3] 熊全淹. 近世代数[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1984.

[4] SCOTT W R. On the multiplicative group of a division ring[J]. Proc Amer Math Soc, 1957, 8: 303~305

引理 2 知 $(\text{Reg}R \setminus \{0\}, \cdot)$ 为其子群. 下面仅需证 $(\text{Reg}R, +)$ 为 $(R, +)$ 的子群即可.

$$\text{I} \quad \because 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0, \therefore 0 \in \text{Reg}R.$$

$$\text{II} \quad \forall a \in \text{Reg}R \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \exists a^{-1} \in \text{Reg}R \setminus \{0\} (aa^{-1} = a^{-1}a = e)$$

$$\Rightarrow -a(-a^{-1}) = -a^{-1}(-a) = e$$

$$\Rightarrow -a(-a^{-1})(-a) = -a$$

$$\Rightarrow -a \in \text{Reg}R \setminus \{0\},$$

即在 $\text{Reg}R \setminus \{0\}$ 关于 $+$ 的逆元 $-a$ 存在.

III $\forall a, b \in \text{Reg}R$, 若 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则 $a + b \in \text{Reg}R$ 显然.

设 $a \neq 0, b \neq 0$, 故存在 $a^{-1}, b^{-1} \in \text{Reg}R \setminus \{0\}$, 使得 $aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = e$; 又 $(b^{-1} + a^{-1})b \in R$, 若 $b^{-1} + a^{-1} \neq 0$, 由引理 3, $\text{Reg}R \setminus \{0\}$ 为 $R \setminus \{0\}$ 的理想, 则

$$a(b^{-1} + a^{-1})b = a + b \in \text{Reg}R \setminus \{0\};$$

若 $b^{-1} + a^{-1} = 0$, 则 $-b^{-1} = a^{-1}$, 从而

$$\begin{aligned} b = bb^{-1}b = aa^{-1}b = -ab^{-1}b = aa^{-1}a = -a \\ \Rightarrow a + b = 0 \in \text{Reg}R. \end{aligned}$$

IV 分配律自然成立.

综上, 证得 $(\text{Reg}R, +, \cdot)$ 为体. 又由于 $\text{Reg}R$ 为 R 的最大正则元集, 故 $(\text{Reg}R, +, \cdot)$ 为 R 的最大子体.

推论 1 设 $R_1, \dots, R_n$ 为拟环, 则 $\text{Reg}R_1 \times \dots \times R_n$ 为体.

定理 5 令 R 为拟环, 则 $R/\text{Reg}R$ 是幂零元环.

证明 据引理 3 $(\text{Reg}R \setminus \{0\}, \cdot)$ 为 $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ 的理想, 故而有 $(\text{Reg}R, \cdot)$ 为 $(R, \cdot)$ 的理想, 即 $(\text{Reg}R, +, \cdot)$ 为 $(R, +, \cdot)$ 的理想子环, 从而据文献 [3] 知, $R/\text{Reg}R$ 为同余环. 又

$$\begin{aligned} \forall \bar{x} \in R/\text{Reg}R \Rightarrow x \in R \Rightarrow \exists n \in N (x^n \in \text{Reg}R) \\ \Rightarrow \bar{x}^n = \bar{x}^n = \bar{0}. \end{aligned}$$

综上, 证得 $R/\text{Reg}R$ 为幂零元环, 从而得出如下与定理 3 对应的重要结果:

定理 3' 令 $(R, +, \cdot)$ 为拟环, 则它必为其最大子体 $(\text{Reg}R, +, \cdot)$ 的幂零扩张.

推论 2 令 $(R, +, \cdot)$ 为拟环, 则 $(R, \cdot)$ 为其最大子群 $(\text{Reg}R, +, \cdot)$ 的幂零扩张.