

文章编号 :1009-038X(2000)03-0296-03

分立谱线的精确辨认方法*

张处武, 田 敏, 伏乃林, 赵正敏
(淮阴工业专科学校, 江苏淮阴 223001)

摘 要 :谱线辨识是数字信号处理的一个重要课题. 利用完全对称窗的实谱特性可以判定分立谱线的存在. 相继两次 DFT 分析(实为一次复时域信号分析)可精确确定诸分立谱线的频率、幅度与相位. 作者提出的分立谱线辨识方法普遍适用于各种周期性时域信号的精密谱分析工作.
关键词 :分立谱线; 谱线辨识; 实谱特性
中图分类号 : TN911.72 **文献标识码 :** A

A Precision Identification Approach to Discrete Spectral Lines

ZHANG Chu-wu, TIAN Min, FU Nai-lin, ZHAO Zheng-min
(Huaiyin Industry training School, Huaiyin 223001)

Abstract : The identification of spectral lines is an important topic of Digital Signal Processing (DSP). The occurrence of discrete spectral lines can be determined by means of real spectral characteristic of complete symmetrical window. The frequency and amplitude and phase of discrete spectral lines can be calculated through two DFT analyses one after another, which is one complex time domain signal analysis virtually. The method of discrete spectral line identification presented in this paper can be applied to the precise spectral analysis of all kinds of periodic time domain signals.
Key words : discrete spectral Lines; spectral lines identification; real spectral characteristic

周期性信号具有离散谱, 对此类信号施行滤波操作后仅剩下有限条谱线, 精确辨认这些分立谱线是数字信号处理的一个重要课题. 在应用 DFT 作谱分析时, 由于栅栏效应, 当谱线位置与分析点不重合时, 只能依靠窗的泄露窥其一斑. 在采样频率确定以后, 虽然可用增加采样点(即加大采样时间总长度)的方法提高分辨力, 但这一方法并不能使频差对分辨率的相对偏差减小, 因此对精确判定谱线用处不大.

采用具有实的局域化窗谱特性的窗函数对信号进行 DFT 分析, 则在窗谱的主瓣内将含有若干个由窗泄露造成的相位相同的谱分析值, 据此可以

判定这些分析值系由同一条真实谱线引起. 对信号及其时移的连续两次 DFT 分析可以精确求出真实谱线的位置, 进而可以精确计算谱线幅度. 此一方法以两倍的 FFT 计算工作量换取了分立谱线的分辨能力的无限提高. 如果将采样数据存于复数组, 则计算工作量增加甚微.

1 孤立谱线辨识

对连续时域信号 $x(t)$ 作 DFT 分析首先应作加权截断与采样, 设截断用窗函数为 $w(t)$, 其宽度 T , 相应分辨率 $\Delta f = 1/T$, 设傅立叶变换谱为

* 收稿日期: 1999-10-10; 修订日期: 2000-03-08.
作者简介: 张处武(1946年11月生), 男, 江苏宿迁人, 工学硕士, 副教授.

$W(f)$ 即

$$W(f) = F(\omega(t)) \tag{1}$$

周期为 T_s 的采样脉冲序列 $g(t)$ 可写为

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \tag{2}$$

其傅立叶变换谱为

$$G(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s) \tag{3}$$

式中 $f_s = 1/T_s$ 为采样频率, 则相应的数字窗 $\omega(nT_s)$ 的窗谱 $W_G(f)$ 为

$$\begin{aligned} W_G(f) &= F(\omega(t)g(t)) = W(f) * G(f) = \\ &= \sum_{n=N_1}^{N_2} \omega(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s} = \\ &= f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} W(f - mf_s) \end{aligned} \tag{4}$$

笔者在“离散傅立叶分析的实质^[1]”一文中指出, 对信号 $x(t)$ 的 DFT 分析实质上是 $x(t)$ 的加权截断采样脉冲序列

$$x_{wg}(t) = x(t)\omega(t)g(t) \tag{5}$$

的傅立叶变换在诸离散频率点 $f = k\Delta f$ 上的谱密度采样值, 即

$$X(k) = F(x_{wg}(t))|_{f=k\Delta f} = X_{WG}(f)|_{f=k\Delta f} \tag{6}$$

设原始时域信号 $x(t)$ 具有孤立谱线, 即

$$X(f) = F(x(t)) = Ae^{j\varphi} \delta(f - f_0) \tag{7}$$

则由 (5) 式利用卷积定理可得

$$\begin{aligned} X_{WG}(f) &= X(f) * W_G(f) = \\ &= Ae^{j\varphi} W_G(f - f_0) \end{aligned} \tag{8}$$

引用 (6) (7) 式有

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=N_1}^{N_2} x(nT_s) \omega(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s} = \\ &= Ae^{j\varphi} W_G(k\Delta f - f_0) \end{aligned} \tag{9}$$

由此可见, 只要数字窗谱 $W_G(f)$ 为实谱, 则在其主瓣内的诸 $X(k)$ 分析值具有相同的相位 (φ)。据此可以判定, 这些相邻的 $X(k)$ 值源于频率为 f_0 的同一条真实谱线。在判定孤立谱线存在的前提下可进一步确定该谱线。由于其相位已在 (9) 式中给出, 我们只需再找出该谱线的频率 f_0 与幅度 A 。

分析信号 $x(t)$ 的时移信号

$$y(t) = x(t + T_s) \tag{10}$$

由傅立叶变换的时移特性可以写出

$$Y(f) = X(f) e^{j2\pi f T_s} = Ae^{j\varphi} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f T_s} \tag{11}$$

使用 (8) (9) 式相似的导出过程可得

$$Y(k) = Ae^{j\varphi + 2\pi f_0 T_s} W_G(k\Delta f - f_0) \tag{12}$$

此时, 利用 $Y(k)$ 与 $X(k)$ 的幅角差值可以判定频率 f_0 的准确值

$$\Delta\varphi = \text{Arg}Y(k) - \text{Arg}X(k) = 2\pi f_0 T_s \tag{13}$$

$$f_0 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \frac{1}{T_s} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} f_s \tag{14}$$

设 $f_0 = l\Delta f$ (15)

则 $l = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot N$ (16)

在求出准确频率 $l\Delta f$ 之后, 依 (9) 式可以方便地定出该谱线的幅度

$$A = \frac{|X(k)|}{W_G((k - l)\Delta f)} \tag{17}$$

至此, 一条孤立谱线的频率、相位与幅度业已全部求出。

2 分立谱线辨认与窗函数

设信号 $x(t)$ 具有有限条分立谱线, 即

$$X(f) = \sum_i A_i e^{j\varphi_i} \delta(f - f_i) \tag{18}$$

则其 DFT 分析值可依 (9) 式为

$$X(k) = \sum_i A_i e^{j\varphi_i} W_G(k\Delta f - f_i) \tag{19}$$

虽然上式表明 $X(k)$ 是所有真实谱线的函数, 但如果采用具有局域化窗谱的窗函数, 以至 $W_G(f)$ 在其主瓣之外可完全忽略, 则当诸真实谱线频差大于 $W_G(f)$ 的主瓣宽度 (B) 时, 即

$$|f_i - f_j| > B \quad (i \neq j) \tag{20}$$

时, 只可能有一条与 $k\Delta f$ 相差在主瓣半宽范围内的真实谱线 f_i 对 $X(k)$ 有可见的影响。即当

$$k\Delta f - f_i < B/2 \tag{21}$$

时有 $X(k) \approx A_i e^{j\varphi_i} W_G(k\Delta f - f_i)$ (22)

事实上, 周期性信号具有离散谱, 只要此信号的基频频率大于所选窗谱的宽度 (这可以通过采样频率与采样长度的调节达到) (20) 式的要求即可满足。虽然不存在副瓣的窗函数难以寻觅, 但采用布莱克曼 - 哈里斯窗已能达到极高的精度, 此数字窗为

$$W(n) = \sum_{m=0}^{k-1} a_m \cos \frac{2\pi}{N} mn \quad n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} \tag{23}$$

其窗谱为 $W_G(f) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_m}{2} [W_R(f - m\Delta f) + W_R(f + m\Delta f)]$ (24)

式中 $W_R(f)$ 为对称矩窗窗谱。

选用三项系数窗 ($k = 3$) (24) 式所表达的窗谱, 其最大副瓣电平相对于主瓣已衰减 67 dB, 如选

用四项系数窗,则其副瓣衰减高达 92 dB,从应用的角度看这已完全满足要求.

3 完全对称窗的实谱特性

以上分析是建立在窗谱为实谱这一基础之上的.但习用的对称谱分析方式

$$X(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n)w(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (25)$$

并非完全对称,它是以非完全对称矩窗截断为基础的,即采用如下矩窗

$$w_r(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2} - 1 \quad (N \text{ 为偶数}) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (26)$$

其相应的窗谱为

$$W_R(f) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{j\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin(N\pi fT_s)}{\sin(\pi fT_s)} e^{j\pi fT_s} \quad (27)$$

将其代入(24)式将使布拉克曼-哈里斯窗亦不具备实谱特性,因此有必要将数字矩窗修改为完全对称形式

$$w_r(n) = \begin{cases} 1 & |n| < \frac{N}{2} \\ 0.5 & |n| = \frac{N}{2} \quad (N \text{ 为偶数}) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (28)$$

此时 $W_R(f) = \frac{\sin(N\pi fT_s)}{\sin(\pi fT_s)}$ (29) 具实谱特性,因此(24)式所表达的窗谱亦具备实谱特性.这在 DFT 的操作上并未带来任何不便,只要将 N+1 个采样值的首尾平均作为第一个采样值使用即可.

4 DFT 运算方法

参考文献

[1] 张处武.离散傅立叶分析的实质[J].淮阴工专学报,1997(4):1~8

谱线的精确辨识需要相继两次 DFT 分析,考虑到完全对称窗的选取,需对时域信号进行 N+2 次采样,得到 N+2 个数据 {x₀, x₁, ..., x_N, x_{N+1}}.将 x₀, x_N 平均作为第一点,其余不变,得出第一组数据记为 {x(n)}.将 x₁, x_{N+1} 平均作为第一点,得到第二组数据记为 {y(n)}.事实上,除首点数据之外 y = x(n+1).根据(13)式,必须进行两次 DFT 分析求出 X(k), Y(k), 计算工作量加倍,但在操作

$$z(n) = x(n) + jy(n) \quad (30)$$

由 $z(k) = X(k) + jY(k) \quad (31)$

$$Z^*(-k) = X(k) - jY(k) \quad (32)$$

解得

$$X(k) = \frac{1}{2}[Z(k) + Z^*(-k)] \quad (33)$$

$$Y(k) = \frac{-j}{2}[Z(k) - Z^*(-k)] \quad (34)$$

考虑到 FFT 算法通常以下式进行

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)w(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (35)$$

因此对应于双边对称算法 $\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} z(n)w(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$,

在计算(33)(34)之前应将 Z(k) 改造为

$$Z'(k) = Z(k) \cdot (-1)^k \quad (36)$$

由上述操作可见,对谱线的精确辨识, DFT 计算工作量增加甚微.

5 结 论

本文提出的分立谱线辨识方法普遍适用于各种周期性时域信号的精密谱分析.分立谱线判定关键在于使用具有局域化实谱特性的完全对称窗函数.对信号 x(t)及其时移 x(t+T_s)的相继两次 DFT 分析,以两倍的计算工作量换取了分立谱线分辨能力的无限提高;事实上,将信号及其时移置放于一复数组中,FFT 计算工作量增甚微,只是充分利用了 FFT 算法的能力而已.

(责任编辑 朱 明)