

文章编号 : 1009 - 038X(2000)03 - 0308 - 04

保加利亚单人独玩牌戏的数学模型的建立及证明*

鲁海燕¹, 陈玮琪²

(1. 无锡轻工大学计算科学和信息传播系, 江苏无锡 214036 2. 中国船舶科学研究中心计算中心, 江苏无锡, 214082)

摘 要 :把原问题推广到任意整数下的一般形式, 并建立了一般形式下的一种新的数学模型, 利用模 p 整数加法群的性质, 简洁地证明了一般形式下的结论, 同时原问题作为一般形式的特例也得到了证明.

关键词 :整数分拆 模 p 整数加法群 Ferrers 图

中图分类号 : O153.3 O153.6 **文献标识码 :** A

The Establishment of a Model for Bulgarian Solitaire and Its Proof

LU Hai-yan¹, CHEN Wei-qi²

(1. Department of Computation Science & Information Communication, Wuxi University of light Industry, Wuxi 214036 2. China Ship Scientific Research Center, Wuxi, 214082)

Abstract : The game Bulgarian Solitaire is a model for some problems in the theory of partition of integers and is one of the famous combinatorial problems which have not been solved. In this paper, the problem is extended to a general form and the according conclusions are laconically proved by applying the properties of Z_p , and the primary problem, as a special case of the general form, is also proved.

Key words : partition of integers ; group of integers modulo p ; Ferrers graph

1 一道组合数学的世界名题

1.1 主要符号说明

$Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 表示模 p 整数加法群^[2].

F 表示 n 的一个分拆, 同时也表示此分拆的 Ferrers 图^[3]中所有整点的集合.

l_i 表示连接坐标点 $(i, 0)$ 和 $(0, i)$ 的斜线.

$(i+j) \equiv c \pmod{p}$ 表示整数 $i, j (i, j < p)$ 的运算是 Z_p 中的加法运算, 其运算结果为 Z_p 中的 c .

1.2 保加利亚单人独玩牌戏原问题

给定 n 张牌, 将它分成任意多堆放在桌子上, 每堆任意多张牌 (即得到整数 n 的一个无序分拆 F). 然后从桌上每堆中取出一张牌, 合成新的一堆, 并把这新堆仍放到桌子上, 得到一个新的分拆 (称上述过程为一步移牌过程), 再对这个新的分拆重复上述移牌过程, 并一直进行下去.

证明如果牌的总数 $n = k(k+1)/2$ (k 为正整数), 即为三角数时, 则无论牌的初始分拆 F 如何, 经过有限步上述移牌过程后, 最后总可以达到一个相继整数的分拆 F' , 即有一堆牌只有一张牌, 另一

* 收稿日期 : 1999 - 10 - 10 修订日期 : 2000 - 03 - 02.
作者简介 : 鲁海燕 (1970 年 8 月生), 女, 山东淄博人, 理学硕士, 讲师.

堆牌有 2 张牌, … 其余依此类推, 最后一堆牌有 k 张牌, 共 k 堆牌的分拆.

欧洲数学家把上述问题称为保加利亚单人独玩牌戏^[1,4], 它是“整数分拆理论中的某些问题的一种模型”; “这个过程总是得出一串不相重复的分拆, 其中最后一个是相继整数分拆”^[1]. 关于这个问题还有一个最大步数的猜想, 即如果不考虑最后相继整数分拆的排列顺序, 则无论初始分拆如何, 牌堆达到最后的相继整数分拆的最大步数不超过 $k(k-1)$ 步. 1982 年美国斯坦福大学的计算机科学家 Donal Ekmuth 和他的学生用计算机来验证这个问题和猜想; “对于 k 小于或等于 10, 他们在计算机上验证了这个问题和猜想, 但是没能得到理论上的数学证明”^[1].

2 保加利亚单人独玩牌戏问题的推广

本文中首先把原问题推广到任意牌数的一般问题形式, 并运用整数模的性质, 简洁地证明了一般形式下的结论, 同时原问题作为一般形式的特例也得到了证明.

引理 1 设 n 为任意正整数, 则总可以找到整数 k, m , 使

$$n = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-m) \text{ 且 } 0 \leq m \leq k$$

引理 1 的结论显然, 利用引理 1 可以把原问题推广到一般形式.

定理 1 给定任意数 n 张牌, 由引理 1, 设 $n = 1 + 2 + \cdots + k - m$. 从 n 的任意一个无序分拆 F 出发, 重复上述移牌过程, 则最后总会达到这样一种分拆 F' , 即从这种分拆 F' 出发, 每进行 k 步移牌过程, 则又回到出发的这种分拆 F' (称这种分拆 F' 为循环分拆), 且当 $m \neq 0$ 时, 有 C_k^m/k 种不同的循环分拆; 当 $m = 0$ 时, 分拆 F' 就是相继整数分拆, 也就是保加利亚单人独玩牌戏问题的唯一解. 下面的讨论考虑分拆部分的排列顺序.

3 问题的数学模型

3.1 分拆的 Ferrers 图表示

整数 n 的分拆可以用 Ferrers 图, 即平面上的整数整点阵图来表示^[3]. 为了保持实际问题的直观性, 本文中把 Ferrers 图顺时针旋转 90 度, 即用图的列来表示分拆的部分, 并且不考虑列的排列顺序 (见图 1), 这样图中的每一列就相当于桌子上的一堆牌, 牌用黑点表示. 如果把最后一行作为 X 轴, 最右一堆牌所在列作为 Y 轴, 则可建立坐标系并标上

坐标数 (见图 2). 因此, 图上的任意整点 a 可以用它的坐标 (i, j) 来表示.

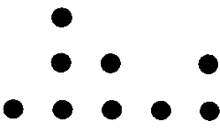


图 1 Ferrers
Fig.1 Ferrers graph 图

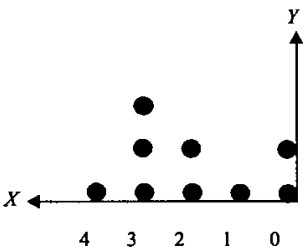
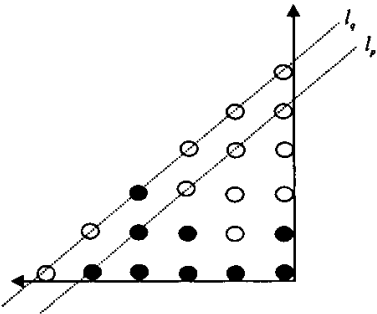


图 2 坐标图
Fig.2 Coordinates axis

因牌数是一定的, 所以总可以画一条对角斜线 l_q , 使所有黑点都在斜线 l_q 和 X 轴、 Y 轴所组成的三角形内 (见图 3), 由引理 1, 显然有 $q \geq k-1$, 而且三角形内所有整点都在某条斜线 l_p ($p = 0, 1, \cdots, q$) 上, 且 l_p 上有 $(p+1)$ 个整点. 在这个三角形内把所有不是黑点的整点用白点表示, 即表示这个整点没有放牌, 是一个空的位置, 见图 3.



$$\nabla(F) = \nabla_{0 \leq i, j \leq q} a(i, j) = \nabla_{0 \leq i, j \leq q} a(i+1, j-1) \quad (\text{mod } p) \quad (2)$$

$(\text{mod } p)$ 表示坐标 $i+1$ 和 $j-1$ 的运算是 Z_p 中的模 p 运算. 类似的, 可以定义逆算子 ∇^{-1} :

$$\nabla^{-1}(F) = \nabla_{0 \leq i, j \leq q}^{-1} a(i, j) = a(i-1, j+1) \quad (\text{mod } p) \quad (3)$$

显然有 $\nabla \cdot \nabla^{-1} = \nabla^{-1} \cdot \nabla = I$ (I 为恒等算子).

特别的, 当 $j=0$ 时, 即为 X 轴上的整点 $a(i, 0)$ ($0 \leq i \leq q$) (表示每堆牌中的最后一张牌), 由(2)和(3)式可得

$$\nabla a(i, 0) = a(0, i) \quad (\text{mod } i+1) \quad (4)$$

由(2)和(3)式可知, 当 $j \neq 0$ 时, 算子 ∇ 的作用使分拆 F 中的整点 $a(i, j)$ 沿所在的斜线 l_{p-1} 向下移动一格, 即 a 从坐标 (i, j) 移到坐标 $(i+1, j-1)$ 的位置上. 显然除了每列中最后一张牌, 其它的牌在移动结束后, 同一堆中的牌仍在同一列中, 只不过每列的位置向前移动了一格. 当 $j=0$ 时, 由(4)式可知, 表示所有在 X 轴位置上 $(i, 0)$ ($i=0, 1, \dots, q$) 上的牌向上移到 Y 轴的对应位置 $(0, j)$ 上, 相当于从每堆牌中取出一张牌 (每堆中的最后一张牌) 合成新的一堆放在第 0 列上.

因此, 由(2)(3)式和(4)式可知, 算子 ∇ 对分拆 F 的一次作用, 就表示一步移牌过程. 考虑斜线 l_{p-1} 上的任意一整点 $a(i, j)$, 经过多步移牌过程后, $a(i, j)$ 一步步沿所在的斜线 l_{p-1} 向下移动, 直至到达 X 轴上, 再一步移牌过程后, 整点 $a(i, j)$ 从 X 轴上向上回到 Y 轴的对应位置上, 在整个移牌过程中, 整点 $a(i, j)$ 总在 l_{p-1} 上. 所以称这种位移为循环位移, 算子 ∇ 称为模位移算子.

记 $\nabla^M = \underbrace{\nabla \cdot \nabla \cdots \nabla}_M$ (M 表示移牌过程的步数), 则根据(2)显然有

$$\nabla^M a(i, j) = a(i+1 \cdot M, j-1 \cdot M) \quad (\text{mod } p) \quad (5)$$

因此由(5)式得

$$\nabla^p a(i, j) = a(i+1 \cdot p, j-1 \cdot p) = a(i, j) \quad (\text{mod } p, p=i+j+1) \quad (6)$$

由(6)式可知, 因为 l_{p-1} 上共有 p 个整点, 所以 $a(i, j)$ 只需经过 p 步位移就回到了原位置, 因此 p 称为 a 整点的位移模, 显然斜线 l_{p-1} 上的所有整点的位移模都为 p .

实际移牌过程中, 牌(黑点)一旦位于同一列的空位(白点)上面, 则牌(黑点)就落入空位(白点)中, 而牌(黑点)原来所在位置的整点就成为一空位, 仍用白点表示. 显然在移牌过程中这种现象只

发生在第 0 列上.

因此根据实际情况, 上述数学模型应加上一个条件 (见图 4).

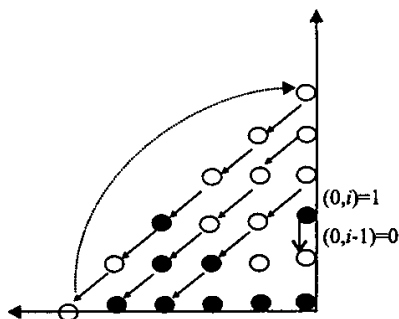


图 4 位移方式

Fig.4 Manner of displacement

若 $|a(i, 0)| = 1$ 且 $|b(i-1, 0)| = 0$, 则

$$\begin{cases} \nabla a(i, 0) = |a(0, i)| = 0 \\ \nabla b(i-1, 0) = |b(0, i-1)| = 1 \end{cases} \quad (0 \leq i \leq q) \quad (7)$$

其他, $|\nabla a(i, j)| = |a(i, j)|$.

因此, 上述(1)~(7)式就是移牌过程的数学模型, 模位移算子 ∇ 对分拆 F 的一步作用就相当于一步移牌过程.

4 保加利亚单人独玩牌戏及一般形式的证明

引理 2 斜线 l_{p-1} 上的任意一点 B 和斜线 l_p 上任意一点 A 的模相差 1 位 (见图 5), 证明经过有限步位移过程后, A, B 两点必相遇在同一列中, 即位于同一堆牌中.

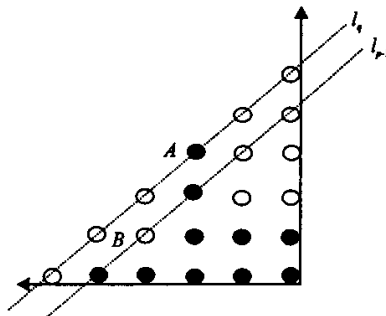


图 5 A, B 点的位置

Fig.5 Positions of A and B

证 设 l_{p-1} 线上的点为 $B(i, j)$ ($0 \leq i, j \leq p$), 模为 p ;

l_p 线上的点为 $A(i', j')$ ($0 \leq i', j' \leq p+1$), 模为 $p+1$, 则显然有

$$\begin{cases} i+j+1=p \\ i'+j'+1=p+1 \end{cases} \quad (8)$$

再令 $L = (i' - i) \pmod{p+1}$, $0 \leq i \leq p, 0 \leq i' \leq p+$

1), 见图 6, 称 L 为 A 点到 B 点的距离. 则显然有

$$1 \leq L \leq p \tag{9}$$

则进行 $(p \cdot L)$ 步移牌过程后, A, B 的位置根据 (6) 式和 (7) 式可得

$$\begin{aligned} \nabla^{p \cdot L} B(i, j) &= B(i + 1 \cdot p \cdot L, j - 1 \cdot p \cdot L) = \\ &= B(i, j) \pmod{p} \tag{10} \\ \nabla^{p \cdot L} A(i', j') &= \nabla^{-L} \cdot \nabla^{(p+1) \cdot L} A(i', j') = \\ &= \nabla^{-L} A(i', j') = A(i' - L, j' + L) \pmod{p+1}. \end{aligned}$$

根据 (8) 式和 (9) 式, 则有

$$\nabla^{p \cdot L} A(i', j') = A(i' - L, j' + L) = A(i, j + 1) \pmod{p+1} \tag{11}$$

所以, 根据 (10) 式和 (11) 式, 经过 $(p \cdot L)$ 有限步移牌过程后, A, B 将位于同一第 i 列上. 引理得证.

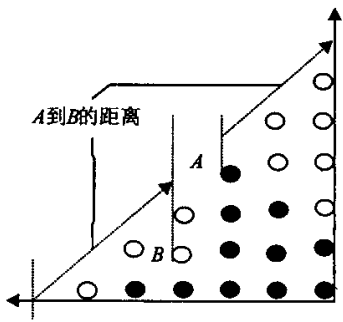


图 6 A 点到 B 点的距离
Fig. 6 Distance from A to B

由引理 2 的证明过程可得到推论 1.

推论 1 设 l_p 上点 A 到 l_{p-1} 上点 B 的距离为 L , 则经过 $p \cdot L$ 有限步移牌过程后, A, B 将位于同一列上.

假如 A 为黑点, B 为白点, 则根据 (7) 式, 当 A, B 将位于同一列时, A 将落入 B 的空位中. 所以

根据推论 1 和 (9) 式可得到推论 2.

推论 2 l_p 上的任意一个黑点落入 l_{p-1} 上任意一个白点中的最大移牌步数不超过 p^2 步.

利用引理 1 和引理 2 就可以证明定理 1.

证明 设所有的黑点都在 l_q 线以下, 由引理 1, $q \geq k$. 再根据引理 2, l_q 上的黑点将在有限步后落入 l_{q-1} 上的白点中, 同理, 落在 l_{q-1} 上的黑点和 l_{q-1} 上原来的黑点也将在有限步后落入 l_{q-2} 上的白点中, $\cdots$ 依此类推. 又由引理 1, $n = 1 + 2 + \cdots + k - m$ ($0 \leq m \leq k$), 即 l_k 线以下的整点数加上 l_k 线上的 $k - m$ 个整点数正好为 n , 所以最后所有黑点都将落入线以下和线上的 $k - m$ 个整点位置上, 即在 l_k 线上只剩 m 个白点, l_k 线以上全是白点. 从这种分拆出发, 可以看出, 因为 l_k 线以下都为黑点, 所以在位移中不发生状态的变化, 而 l_k 线上的 $k - m$ 个黑点的模都为 k , 所以每经过 k 步移牌过程后, 所有黑点又回到了 l_k 线上的原位置, 即分拆又回到了出发时的分拆. 即这种分拆为循环分拆. 又因为上面的每一步都是有限的, 所以到达循环分拆的整个移牌步数是有限的.

当 $m \neq 0$ 时, l_k 线上的 $k - m$ 个黑点在 l_k 线上的 k 个整点位置上的每一个排列数对应着一个循环分拆, 除去同一分拆在循环过程中出现的排列数, 则共有 C_k^m/k 个排列数, 即共有 C_k^m/k 个循环分拆.

当 $m = 0$ 时, l_k 线上没有白点, 此时即为相继整数分拆, 也就是保加利亚单人独玩牌戏原问题的唯一解.

就此, 定理 1 及保加利亚单人独玩牌戏原问题得到证明.

参考文献

[1] 马丁·加德纳. 数学黑洞[J]. 科学(Scientific American 中译本), 1983(12) 38~90.
[2] Hungerford T W 著. 代数学[M]. 冯克勤译. 长沙: 湖南教育出版社, 1985. 259~306
[3] 柯召, 魏万迪. 组合论[M]. 北京: 科学出版社, 1985. 259~306
[4] NICHOLSON A L. Bulgarian Solitaire[J]. Math Teacher, 1993, 86(1) 34~86.

(责任编辑 秦和平)