

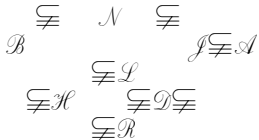
文章编号 :1009-038X(2000)03-0312-03

广义 Green 关系 $\mathcal{N}$ 、 $\mathcal{A}$ 与广义理想 $N(a)$

朱 平¹, 逢金辉²

(1. 无锡轻工大学计算科学与信息传播系, 江苏无锡 214036; 2. 沙洲工学院基础课部, 江苏张家港 215600)

摘 要 : 定义了广义关系 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{A}$ 以及主 $\mathcal{N}$ 理想 $N(a)$, 并证明了 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$, 进而加细了 Green 关系, 且给出了关系结构 :



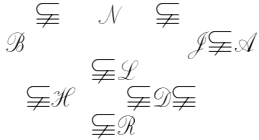
关键词 : 广义关系 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{A}$; 主 $\mathcal{N}$ 理想 $N(a)$; 格林关系
中图分类号 : O152.7 文献标识码 : A

Some general Green 's relations $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$ and general ideals $N(a)$

ZHU Ping¹, PANG Jin-hui²

(1. Department of Computation Science & Information Communication, Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036; 2. Department of Basic Science, Shazhou College, Zhangjiagang 215600)

Abstract : In this paper, some kinds of general relations $\mathcal{N}$ and $\mathcal{A}$ and principal $\mathcal{N}$ ideal $N(a)$ are defined. Futhermore, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ is proved. At last, the following relation 's graph is given.



Key words : general relations $\mathcal{N}$ and $\mathcal{A}$; principal $\mathcal{N}$ indeal $N(a)$; Green 's relations

众所周知,环论中的重要概念——理想,在半群理论中,鉴于必要与可能,平行地发展出 3 类概念,其中之一便是著名的 Green 关系. 因此,Green 关系是否可以加细和完善便成为亟待解决的问题,前人已经找出了 $\mathcal{B}$ 关系,并给出了 $B(a)$ 及 $Q(a)$,本文中则定义出了 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{A}$ 关系,同时定义了主 $\mathcal{N}$ 理想 $N(a)$,并讨论了它的一系列性质.

定义 1 设 S 为半群^[1,2]. 则 $\forall a, b \in S$, 有

$$\begin{aligned} a\mathcal{B}b &\Leftrightarrow \exists x, y \in S^1 [a = bxb \text{ \& } b = aya] \text{ 或 } a = b; \\ a\mathcal{L}b &\Leftrightarrow \exists x, y \in S^1 [xa = b \text{ \& } yb = a]; \\ a\mathcal{R}b &\Leftrightarrow \exists u, v \in S^1 [au = b \text{ \& } bv = a]; \\ a\mathcal{J}b &\Leftrightarrow \exists x, y, u, v \in S^1 [xay = b \text{ \& } ubv = a]; \\ a\mathcal{H}b &\Leftrightarrow a\mathcal{L}b \text{ \& } a\mathcal{R}b; \\ a\mathcal{D}b &\Leftrightarrow a(\mathcal{L} \vee \mathcal{R})b. \end{aligned}$$

* 收稿日期 :1999-01-14, 修订日期 2000-03-09.
作者简介 : 朱平 (1962 年 9 月生), 女, 安徽巢湖人, 理学学士, 副教授.

引理 1 如上 $\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ 便是著名的 Green 关系及其推广, 且它们有如下真包含关系:

$$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{J}$$

设 S 为半群, $\forall a \in S$ 称 $B(a) = \{a\} \cup aS^1a$, $Q(a) = S^1a \cap aS^1$, $L(a) = S^1a$, $R(a) = aS^1$, $J(a) = S^1aS^1$ 分别为由 a 生成的主双理想、主拟理想、主左理想、主右理想及主理想, 且有如下结论:

引理 2 令 S 为半群^[12], 则关于任意 $a, b \in S$ 有

$$\begin{aligned} aBb &\Leftrightarrow B(a) = B(b); \\ aHb &\Leftrightarrow Q(a) = Q(b); \\ aLb &\Leftrightarrow L(a) = L(b); \\ aJb &\Leftrightarrow J(a) = J(b). \end{aligned}$$

定义 2 设 S 为半群, 则, $\forall a, b \in S$, 记 $\mathcal{N}$ 为如下定义的二元关系:

$$a\mathcal{N}b \Leftrightarrow \exists x, y, s, t, u, v \in S^1, [a = xbybu \text{ 且 } b = satav \text{ 或 } a = b].$$

定理 1 设 S 为半群, $\mathcal{N}$ 如上定义, 则 $\mathcal{N}$ 为等价关系, 且 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{J}$.

证明 仅需证传递性,

$$\begin{aligned} &\forall a, b, c \in S, a\mathcal{N}b, b\mathcal{N}c, a \neq b \neq c \\ &\Rightarrow \exists x_1, y_1, u_1, v_1, s_1, t_1, x_2, y_2, u_2, v_2, s_2, t_2 \\ &\quad [a = x_1by_1bu_1 \text{ 且 } b = s_1at_1av_1 \text{ 且 } b = s_2ct_2cv_2 \\ &\quad \text{ 且 } c = x_2by_2bu_2] \\ &\Rightarrow a = (x_1s_2)ct_2d(v_2y_1bu_1) = xcycu \\ &\quad c = (x_2s_1)at_1d(v_1y_2bu_2) = satav \\ &\Rightarrow a\mathcal{N}c \end{aligned}$$

即 $\mathcal{N}$ 为等价关系.

$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{J}$ 显然, 由下面反例知 $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{J}$.

例 1 令 $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \overline{\mathbb{Z}} \right\}$, 则由矩阵运算知 S 构成半群.

$$\begin{aligned} &\text{取 } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S, \text{ 则据} \\ &\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\text{知 } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 从而 } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ &\text{但是对于任意的 } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \\ &S^1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4ace & eacf \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

同理, 将其中的任意 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 换成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 运算结果是省去 a, c, e, f 中部分因子, 但

$$4x \neq 2 \text{ 由 } x \in \overline{\mathbb{Z}} \text{ 即 } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{N} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由上知 $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{J}$.

定义 3 设 S 为半群, 称 $N(a) = S^1aS^1aS^1 \cup \{a\}$ 为由 a 生成的主 $\mathcal{N}$ 理想.

定理 2 $a\mathcal{N}b \Leftrightarrow N(a) = N(b)$.

证明 设 $a\mathcal{N}b, a \neq b$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x, y, s, t, u, v \in S^1 [a = xbybu \text{ 且 } b = \\ &\quad satav] \\ &\Rightarrow a \in S^1bS^1bS^1 \text{ 且 } b \in S^1aS^1aS^1 \\ &\Rightarrow S^1aS^1aS^1 \subseteq S^1 \cdot S^1bS^1bS^1 \cdot S^1aS^1 \subseteq \\ &\quad S^1bS^1bS^1. \end{aligned}$$

同理可证 $S^1bS^1bS^1 \subseteq S^1aS^1aS^1$. 于是, $S^1aS^1aS^1 = S^1bS^1bS^1$.

$$\begin{aligned} &\text{又据 } a \in S^1bS^1bS^1, b \in S^1aS^1aS^1 \\ &\Rightarrow N(a) = N(b). \end{aligned}$$

反之, 设 $N(a) = N(b)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a = b \text{ 或 } a \in S^1bS^1bS^1 \text{ 且 } b \in S^1aS^1aS^1 \\ &\Rightarrow a\mathcal{N}b \end{aligned}$$

命题 1 设 S 为半群, 则 $N(a) = \{a\} \Rightarrow S = \{a\}$

证明 $\because S = \{a\} \Rightarrow N(a) = S^1aS^1aS^1 \cup \{a\} = \{a\}$, $\therefore$ 仅需证必要性.

设 $b \in S$, 则据 $N(a) = S^1aS^1aS^1 \cup \{a\} = \{a\}$, 可得 $aba \in \{a\}$ 即 $aba = a$, 进而 $bab = babab \in S^1aS^1aS^1 = \{a\}$, 即 $bab = a$, 又由 $N(b) = \{b\}$, 有 $bab = b$, 故 $b = a$, 从而证得 $S = \{a\}$.

命题 2 设 S 为半群, $\forall a \in \text{Reg} S$, 则 $J(a) = N(a)$.

证明 $N(a) = S^1aS^1aS^1 \cup \{a\} \subseteq S^1aS^1$ 而任意 $b \in \text{Reg} S$, 如 $b \in J(a) = S^1aS^1$, 有 $b = xay = xaa'ay \in S^1aS^1aS^1 \cup \{a\} = N(a)$, 故有 $N(a) = J(a)$.

推论 1 设 S 正则, 则 $\mathcal{J} = \mathcal{N}$, 称半群 S 为半单的, 如果 $\forall a \in S [a \in SaSaS]$.

命题 3 设 S 半单, 则 $\mathcal{N} = \mathcal{J}$.

推论 2 设 S 为半群, 若 $\mathcal{J} = S \times S$, 则 $\mathcal{J} = \mathcal{N}$, 据 $\mathcal{J} = S \times S$ 知 S 为单半群, 从而半单, 故 $\mathcal{J} = \mathcal{N}$.

命题 4 $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{N}$.

证明 由 $\mathcal{B}$ 的定义 $\forall a, b \in S, a\mathcal{B}b$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x, y \in S^1 [a = bxb \text{ 且 } b = aya] \text{ 或 } a = b \\ &\Rightarrow \exists x, y, 1 \in S^1 [a = 1 \cdot bxb \cdot 1 \text{ 且 } b = 1 \cdot aya \cdot 1] \\ &\quad \text{或 } a = b \\ &\Rightarrow a\mathcal{N}b. \end{aligned}$$

由下面反例可知 $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{N}$.

例 2 令 $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a, b > 0 \right\}$ 则可以验证 $\mathcal{B} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = \mid_{\text{SSS}}, \mathcal{J} = S \times S$, 从而据推论 2, $\mathcal{N} = S \times S$,

即 $\mathcal{B} \neq \mathcal{N}$, 故 $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{N}$.

下面的例子将告诉我们 $\mathcal{N}$ 关系与 $\mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}$ 严格平行插入于 $\mathcal{B}, \mathcal{J}$ 之间.

例 3 $S = \{a_1, a_2, b, b^2, 0\}$ 运算如下:

$\cdot$	a_1	a_2	b	b^2	0
a_1	0	0	a_1	a_2	0
a_2	0	0	a_1	a_2	0
b	a_1	a_1	b^2	b	0
b^2	a_2	a_2	b	b^2	0
0	0	0	0	0	0

则 $N(a_1) = \{a_1\} \cup S^1 a_1 S^1 a_1 S^1 = \{a_1\} \cup \{0\}$, $N(a_2) = \{a_2\} \cup \{0\}$, 从而 $a_1 \mathcal{N} a_2$, 但是由 $a_1 = a_2 b = b a_2$, $a_2 = a_1 b = b a_1$, 即 $a_1 \mathcal{H} a_2$, 从而 $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{N}$.

又由例 2 知 $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{H}$, 故有下面定理成立.

定理 3 $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{N} \subsetneq \mathcal{J}$
 $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{R} \subsetneq \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{J}$

注 1: 事实上, 例 1 可由例 3 代替.
 注 2: 由例 3 可知, 即使 S 为可换半群, 亦未必有 $\mathcal{N} = \mathcal{J}$.

定义 4 令 S 为半群, 则关于任意 $a, b \in S$, 记 $\mathcal{A}$ 为如下表示的二元关系:

$$a \mathcal{A} b \Leftrightarrow \exists x, y, u, v, s, t \in S^1, \\ [a^2 = xbyu \text{ \& } b^2 = satv \text{ 或 } a = b].$$

定理 4 设 S 为半群, $\mathcal{A}$ 如上定义, 则 $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{A}$.

$\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{A}$ 显然, 由下例可知真包含关系.

例 4 令 $S = \{a, a^2, 0\}$ 为幂零半群, 即

$\cdot$	a	a^2	0
a	a^2	0	0
a^2	0	0	0
0	0	0	0

则 $a^2 \mathcal{A} 0$, 但 $a^2 \not\mathcal{J} 0$.

半群 S 称为完全正则的, 如果关于任意 $a \in S$, 存在 $x \in S$ 使得 $axa = a$ 且 $ax = xa$.

命题 5 设 S 为完全正则半群, 则 $\mathcal{J} = \mathcal{A}$.

证明 设 $a \mathcal{A} b$, $a \neq b$, 则 $a^2 = xbyba$, $b^2 = satav$. 据 S 是完全正则的, 存在 $a' \in V(a)$, $b' \in V(b)$, 使得
 $a = aa'a = a^2 a' = xbyba' = xbm$,
 $b = bb'b = b^2 b' = satavb' = san$,

据 $\mathcal{J}$ 的定义可知 $a \mathcal{J} b$, 因此证得 $\mathcal{J} = \mathcal{A}$.

称 S 具拟 Hamiltonian 性, 如果
 $\forall a, b \in S, \exists r, s \in N(ab = b^r a^s)]$.

显然, 交换性为它的特例.

命题 6 若 S 具拟 Hamiltonian 性, 且 $a \mathcal{A} b$, 则 $\forall n \in N$, 有 $a^{2n} \mathcal{J} b^{2n}$.

证明 设 $a \mathcal{A} b$, $a \neq b$, 则 $a^2 = xbybu$, $b^2 = satav$. 则由 S 具拟 Hamiltonian 性, 有 $a^2 = xbybu = xy'b^s bu = xy'r b^{s-1} b^2 u$, 同理 $b^2 = pa^2 v$, 故 $a^2 \mathcal{J} b^2$. 由数学归纳法, 可得 $a^{2n} \mathcal{J} b^{2n}$, $\forall n \in N$.

注 3: 由例 4 可知, 即使 S 可交换, 也有 $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$.

称半群 S 上关系 ρ 为素的, 如果 $a^2 \rho b \Rightarrow a \rho b$.

定理 5 设 S 为具拟 Hamiltonian 性的半群且 $\mathcal{A}$ 为素的, 则 $\mathcal{A}$ 为等价关系.

证明 仅需证传递性.

$$\begin{aligned} &\forall a, b, c \in S, a \mathcal{A} b, b \mathcal{A} c, a \neq b \neq c \\ &\Rightarrow a^2 = mbnbl = mbb^r n^s l \in S^1 b^2 S^1 \\ &b^2 = xayaz = xaa^k y^h z \in S^1 a^2 S^1 \\ &b^2 = x'cy'cz = x'cc^k y'^h z' \in S^1 c^2 S^1 \\ &c^2 = m'bn'bl' = m'bb^s n'^t l' \in S^1 b^2 S^1 \\ &\Rightarrow a^2 \mathcal{J} b^2, b^2 \mathcal{J} c^2 \Rightarrow a^2 \mathcal{J} c^2 \Rightarrow a^2 \mathcal{A} c \Rightarrow a^2 \mathcal{A} c \Rightarrow a \mathcal{A} c. \end{aligned}$$

命题 7 设 S 为半单的且具拟 Hamiltonian 性的半群, 则 $\mathcal{J} = \mathcal{A}$.

证明 设 S 为半单的, 则 $\forall a \in S, a = xayaz$. 又据 S 有拟 Hamiltonian 性, 有 $a = xa \cdot a^r y^s z \in S^1 a^2 S^1$, $a^2 = a \cdot a \cdot 1 \in S^1 a S^1$. 故 $a^2 \mathcal{J} a$, 同理 $b^2 \mathcal{J} b$.

设 $a \mathcal{A} b$, 据命题 6, 知 $a^2 \mathcal{J} b^2$, 由上面结果立得 $a \mathcal{J} b$, 即 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}$, 故 $\mathcal{A} = \mathcal{J}$.

参考文献

[1] BOGDANOVIC S. Semigroups with a system of Subsemigroups[M]. Novi Sad , 1985.

[2] 朱平. Green 关系与广义理想[J]. 嘉应大学学报, 1996(6): 13~18.

[3] GREEN J A. On the structural of semigroups[J]. Ann of Math , 1951(54): 163~172.

[4] WALLACE A D. Relative ideal in semigroups[II][J]. Acta Math Acad Sci Hung , 1963(14): 137~148.