

文章编号: 1009-038X(2000)06-0640-03

用符号矩阵法修正系统模糊关系 R

高琴妹¹, 徐保国²

(1. 常熟高等专科学校, 江苏常熟 215500; 2. 无锡轻工大学信息与控制工程学院, 江苏无锡 214036)

摘 要: 对于形如 $B \leq R \circ A \leq \bar{B}$ 的模糊关系不等式系统, 采用符号矩阵法, 经模糊变换, 将模糊关系 R 修正为 R^* , 作为此系统新的输入的模糊关系.

关键词: 符号矩阵法; 模糊关系; 模糊关系不等式系统; 模糊变换

中图分类号: N945

文献标识码: A

Application of the Sign Matrix Method to Modify Systematic Fuzzy Relation R

GAO Qin-mei¹, XU Bao-guo²

(1. Changshu College, Changshu 215500; 2. School of Information and Control Engineering, Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036)

Abstract: For fuzzy relation inequality system $B \leq R \circ A \leq \bar{B}$, after its fuzzy relation R is obtained using sign matrix method, fuzzy mapping R is changed into R^* as the new input of fuzzy relation in the preparatory system.

Key words: sign matrix method; fuzzy relation; fuzzy relation inequality system; fuzzy mapping

自从扎德教授提出了模糊集合理论^[1]后, 有关模糊关系方程方面的求解和研究一直在进行. 一个非常有效的称为符号矩阵法的方法在模糊关系方程中得到应用^[2], 并且这个方法也被应用于模糊关系不等式系统的求解^[3]. 在输入和输出均是区间值的模糊关系系统中, 这个方法也得到了成功的应用^[4]. 本文讨论了模糊关系不等式 $B \leq R \circ A \leq \bar{B}$ 中 R, A, B 的三者关系. 并根据符号矩法, 经模糊变换, 将原有的模糊关系 R 修正为 R^* , 作为此系统新的输入的模糊关系.

1 符号矩阵法

1.1 模糊关系不等式系统

定义: 一个模糊关系不等式系统表示形式为

$$B \leq R \circ A \leq \bar{B} \quad (1)$$

其中:

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 是系统的输入矢量,

$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 是系统输出矢量的下限,

$\bar{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m)^T$ 是系统输出矢量的上限,

$R = \{r_{ij}\}$ 是 $m \times n$ 模糊关系矩阵, $0 \leq r_{ij} \leq 1$.

“ $\circ$ ”为模糊运算符号, 在这里采用 $(\vee - \wedge)^{[5]}$

型.

“T”表示矩阵的转置.

式(1)也可表示如下:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} r_{1j} \\ \vdots \\ r_{mj} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

收稿日期: 2000-06-30; 修订日期: 2000-09-23.

作者简介: 高琴妹(1951-), 女, 江苏常熟人, 工学硕士, 副教授.

1.2 符号矩阵的元素

定义: 符号矩阵 $T = \{t_{ij}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

元素 t_{ij} 满足条件:

- 1) if $a_j > \overline{b_i}$, then $t_{ij} = '>'$;
- 2) if $\underline{b_i} \leq a_j \leq \overline{b_i}$ then $t_{ij} = '='$;
- 3) if $a_j < \underline{b_i}$ then $t_{ij} = '<'$;

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

1.3 由符号矩阵 T 求模糊关系 R

作 T 到 R 的模糊变换:

$f(T): T \rightarrow R$
或者 $f(T): t_{ij} \rightarrow r_{ij}$

详细表述如下:

if $t_{ij} = '>'$, then $r_{ij} = \begin{cases} [\underline{b_i}, \overline{b_i}] \text{ 窄区间} \\ [0, \underline{b_i}] \text{ 宽区间} \end{cases}$

if $t_{ij} = '='$, then $r_{ij} = \begin{cases} [\underline{b_i}, 1] \text{ 窄区间} \\ [0, 1] \text{ 宽区间} \end{cases}$

if $t_{ij} = '<'$, then $r_{ij} = [0, 1]$

(3)

(4)

(5)

1.4 模糊变换规则

规则 1 在 T 中, 对于 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 和所有 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, if $t_{ij} = '<'$ then $r_{ij} = [0, 1]$

规则 2 在 T 中, 如果对于一些 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t_{is} = '>'$, 而对于所有 $j \neq s, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t_{ij} = '<'$ then $r_{is} = [\underline{b_i}, \overline{b_i}]$.

规则 3 在 T 中, 如果对于一些 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t_{is} = '='$, 而对于所有 $j \neq s, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t_{ij} = '<'$ then $r_{is} = [\underline{b_i}, 1]$.

规则 4 在 T 中, 如果对于一些 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 在 T 的 i^{th} 行中, 符号 $'>'$ 和符号 $'='$ 的和是 c , 且 $c \geq 1$, 那么 c 矩阵 $R_1, R_2, \dots, R_c$ 应被考虑, 对每一个 $R_k, k \in \{1, 2, \dots, c\}$, 元素 r_{kij} 是窄区间, 其余都是宽区间, 证明于文献 [4] 中.

2 模糊关系 R 的修正

2.1 R 中元素 r_{ij} 上限值的确定

对于输入矢量也为区间值的模糊不等式系统, 如下所示:

$$\begin{bmatrix} r_{ij} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} [\underline{a_1}, \overline{a_1}] \\ \vdots \\ [\underline{a_n}, \overline{a_n}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{b_1}, \overline{b_1}] \\ \vdots \\ [\underline{b_m}, \overline{b_m}] \end{bmatrix}$$

(6)

1) 列出输入矢量为 $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})^T$ 时模糊不等式系统的符号矩阵

2) 进行 $T \rightarrow R(\overline{r_{ij}})$ 的模糊变换.

if $t_{ij} = '>'$, then $\overline{r_{ij}} = \overline{b_i}$

if $t_{ij} = '='$, then $\overline{r_{ij}} = 1$

if $t_{ij} = '<'$, then $\overline{r_{ij}} = 1$

(7)

(8)

(9)

对于式(6) R 中元素下限值 $\underline{r_{ij}}$ 的确定, 采用符号矩阵法.

2.2 求模糊关系不等式系统的模糊关系 R

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} [0.2, 0.4] \\ [0.7, 0.8] \\ [0.8, 0.9] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0.3, 0.4] \\ [0.5, 0.6] \\ [0.7, 0.8] \end{bmatrix}$$

(10)

1) 列出式(10)上限、下限方程的符号矩阵 T_1 和 T_2

$$T_1 = \begin{bmatrix} = & > & > \\ < & > & > \\ < & = & > \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} < & > & > \\ < & > & > \\ < & = & = \end{bmatrix}$$

2) 由规则 1、规则 4、式(3)~式(5)和式(7)~式(9)求得模糊关系为 $R_1 \sim R_6$

$$R_1 = \begin{bmatrix} [0, 1] [0.3, 0.4] [0, 0.4] \\ [0, 1] [0.5, 0.6] [0, 0.6] \\ [0, 1] [0.7, 1.0] [0, 0.8] \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} [0, 1] [0.0, 0.4] [0.3, 0.4] \\ [0, 1] [0.5, 0.6] [0.0, 0.6] \\ [0, 1] [0.7, 1.0] [0.0, 0.8] \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} [0, 1] [0.3, 0.4] [0.0, 0.4] \\ [0, 1] [0.0, 0.6] [0.5, 0.6] \\ [0, 1] [0.0, 1.0] [0.7, 0.8] \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} [0, 1] [0.0, 0.4] [0.3, 0.4] \\ [0, 1] [0.0, 0.6] [0.5, 0.6] \\ [0, 1] [0.0, 1.0] [0.7, 0.8] \end{bmatrix}$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} [0, 1] [0.0, 0.4] [0.3, 0.4] \\ [0, 1] [0.5, 0.6] [0.0, 0.6] \\ [0, 1] [0.0, 1.0] [0.7, 0.8] \end{bmatrix}$$

$$R_6 = \begin{bmatrix} [0, 1] [0.3, 0.4] [0.0, 0.4] \\ [0, 1] [0.0, 0.6] [0.5, 0.6] \\ [0, 1] [0.7, 1.0] [0.0, 0.8] \end{bmatrix}$$

满足 $R_1 \sim R_6$ 均满足式(10).

讨论 R, A, B 的关系, 不管输入矢量 A 如何变化, 只要输出矢量 B 及符号矩阵 T_1, T_2 不变时, 那么模糊关系 R 仍为 $R_1 \sim R_6$; 当 B 变化为 B' , 而 T_1, T_2 不变时, 那么在 R 中对应的位置上, 以 B' 中的元素代替 B 中的元素. 但当 T_1, T_2 变化时, 那么 R 中的元素都会发生变化.

2.3 修正系统的模糊关系 R

对一个系统来说, 由输入矢量 A 、输出矢量 B , 用符号矩阵法, 并通过模糊变换得到了模糊关系 R .

现以 R 为基础, 给这个系统加上输入矢量 A^* , 由 $(V-\wedge)$ 的模糊运算, 得输出矢量 B^* . 然后根据 A^* 、 B^* , 算得符号矩阵 T^* , 经模糊变换将 R 修正为 R^* , 作为系统新的输入的模糊关系.

1) 式(10)的模糊关系为 $R_1 \sim R_6$. 给这个系统加上输入矢量, 经运算得输出矢量, 如式(11)所示:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} [0.3, 0.5] \\ [0.7, 0.8] \\ [0.6, 0.7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0.30, 0.5] \\ [0.50, 0.6] \\ [0.65, 0.8] \end{bmatrix} \tag{11}$$

运算中, 在 b_3 的位置上出现 2 个不同的数 0.6 和 0.7, 将 b_3 修正为 0.65.

2) 由式(11)分别得上、下限符号矩阵 T_1^* 和 T_2^*

$$T_1^* = \begin{bmatrix} = & > & > \\ < & > & > \\ < & = & = \end{bmatrix} \quad T_2^* = \begin{bmatrix} = & > & > \\ < & > & = \\ < & = & < \end{bmatrix}$$

3) 由 T_1^* 和式(7)~(9)得 R^* 中元素 r_{ij} 的上限值.

$$\overline{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4) 由 T_2^* 根据规则 4 知 $c = 3 \times 2 \times 1 = 6$, R^* 中元素 r_{ij} 的下限值如下式所示:

$$\begin{aligned} \underline{R_1^*} &= \begin{bmatrix} [0 & 0.3 & 0] \\ [0 & 0.5 & 0] \\ [0 & 0.65 & 0] \end{bmatrix} & \underline{R_2^*} &= \begin{bmatrix} [0.3 & 0 & 0] \\ [0 & 0.5 & 0] \\ [0 & 0.65 & 0] \end{bmatrix} \\ \underline{R_3^*} &= \begin{bmatrix} [0 & 0 & 0.3] \\ [0 & 0.5 & 0] \\ [0 & 0.65 & 0] \end{bmatrix} & \underline{R_4^*} &= \begin{bmatrix} [0.3 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 0.3] \\ [0 & 0 & 0.5] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{R_5^*} = \begin{bmatrix} [0.3 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 0.5] \\ [0 & 0.65 & 0] \end{bmatrix} \quad \underline{R_6^*} = \begin{bmatrix} [0 & 0.3 & 0] \\ [0 & 0 & 0.5] \\ [0 & 0.65 & 0] \end{bmatrix}$$

5) 本系统新的输入的模糊关系 R^* 为 $R_1^* \sim R_6^*$.

$$\begin{aligned} R_1^* &= \begin{bmatrix} [0, 1] [0.30, 0.5] [0, 0.5] \\ [0, 1] [0.50, 0.6] [0, 0.6] \\ [0, 1] [0.65, 1.0] [0, 1.0] \end{bmatrix} \\ R_2^* &= \begin{bmatrix} [0.3, 1] [0.00, 0.5] [0, 0.5] \\ [0, 0, 1] [0.50, 0.6] [0, 0.6] \\ [0, 0, 1] [0.65, 1.0] [0, 1.0] \end{bmatrix} \\ R_3^* &= \begin{bmatrix} [0, 1] [0.00, 0.5] [0.3, 0.5] \\ [0, 1] [0.50, 0.6] [0, 0, 0.6] \\ [0, 1] [0.65, 1.0] [0, 0, 1.0] \end{bmatrix} \\ R_4^* &= \begin{bmatrix} [0, 1] [0.00, 0.5] [0.3, 0.5] \\ [0, 1] [0.00, 0.6] [0.5, 0.6] \\ [0, 1] [0.65, 1.0] [0, 0, 1.0] \end{bmatrix} \\ R_5^* &= \begin{bmatrix} [0.3, 1] [0.00, 0.5] [0, 0, 0.5] \\ [0, 0, 1] [0.00, 0.6] [0.5, 0.6] \\ [0, 0, 1] [0.65, 1.0] [0, 0, 1.0] \end{bmatrix} \\ R_6^* &= \begin{bmatrix} [0, 1] [0.30, 0.5] [0, 0, 0.5] \\ [0, 1] [0.00, 0.6] [0.5, 0.6] \\ [0, 1] [0.65, 1.0] [0, 0, 1.0] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3 结 语

本研究采用符号矩阵法, 对模糊关系不待式系统的模糊关系进行了修正, 并以此作为新的输入矢量的模糊关系, 算法简单而方便, 符号矩阵法可推广至具有区间值的其它的模糊系统中.

参考文献

[1] ZADEH L A, Fuzzy sets[J]. **Information and Control** 1965, 8: 338 ~ 353.
[2] HAN S R, SEKIGUCHI T. Solution of a fuzzy relation equation using a sign matrix[J]. **Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems** 1992, 4(1): 160 ~ 171.
[3] HAN S R, SEKIGUCHI T, A method for solution of a fuzzy inequality relation[J]. **Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems** 1992, 4(4): 383 ~ 398.
[4] HAN S R, SONY A H, SCKIGUCHI T. Fuzzy inequality relation system identification via sign matrix method[J]. **IEEE**, 1995(3): 1375 ~ 1382.
[5] YAGER R R. Multicriteria decisions with soft information— an application of fuzzy set and possibility theory (II)[J]. **Fuzzy Math** 1982(3): 7 ~ 16.

(责任编辑: 李春丽)