

文章编号: 1009-038X(2000)06-0646-03

无界区域上的一类有理逼近算子

储志俊¹, 蒋 勇²

(1. 无锡轻工大学计算科学与信息传播系, 江苏无锡 214036; 2. 南京理工大学应用数学系, 江苏南京 210094)

摘 要: 利用一类有理逼近方法, 通过解析映射, 得到无界区域上的一类有理逼近算子, 并给出了算子作用下函数的误差估计和内闭一致收敛特性. 作为应用举例, 给出了算子在 Laplace 变换数值反演中的应用, 为有关数学模型的求解和分析提供了一个较好的工具.

关键词: 有理逼近; 无界区域; Laplace 逆变换; 算子

中图分类号: O174.41

文献标识码: A

A Class of Rational Approximation Operators on Unbounded Range

CHU Zhi-jun¹, JIANG Yong²

(1. Department of Computation Science and Information Communication, Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036; 2. Department of Applid Mathematics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract: Using the method of a class of rational approximations, in this paper, we obtained a class of rational approximation operators on unbounded range by analytic mapping, and gave the error estimate and the property of uniform convergence. For applications, an effective method for the numerical inversion of Laplace transformation was given out. It provides a powerful means for analysing math models.

Key words: rational approximation; unbounded range; inversion of Laplace transformation; operator

无界区域上的有理逼近是一个引人注目的问题, 其中心问题之一是寻求无界区域上函数有理逼近的可接受解 (acceptable solution)^[1], 即要求无界区域上的逼近解能够保留实际生成函数的极性. 作者在文献[1~3]的基础上, 得到相应的无界区域上的一个有效的有理逼近, 并在 Laplace 变换的数值反演中得到了成功的应用.

1 有界区域上的一类有理逼近

定理 1 设 $H(y)$ 在圆盘 $|y| < R$ 上解析, 在闭圆盘 $|y| \leq R$ 上连续, 则 $H(y)$ 的一个有理逼近为

$$H(y) \sim H(y) = \frac{r}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{a(\theta_k)y + b(\theta_k)}{y^2 + c(\theta_k)y + r^2} + i \frac{r}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{d(\theta_k)y + e(\theta_k)}{y^2 + c(\theta_k)y + r^2} \quad |y| < r, r \leq R \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} a(\theta_k) = \operatorname{Im} H(re^{i\theta_k}) \sin \theta_k - \operatorname{Re} H(re^{i\theta_k}) \cos \theta_k \\ b(\theta_k) = r \operatorname{Re} H(re^{i\theta_k}) \\ c(\theta_k) = -2r \cos \theta_k \\ d(\theta_k) = -\operatorname{Im} H(re^{i\theta_k}) \cos \theta_k - \operatorname{Re} H(re^{i\theta_k}) \sin \theta_k \\ e(\theta_k) = r \operatorname{Im} H(re^{i\theta_k}) \\ \theta_k = \frac{k\pi}{N}, k = 1, \dots, 2N \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2000-03-08; 修订日期: 2000-09-20.

作者简介: 储志俊(1957-), 男, 江苏泰州人, 理学学士, 副教授.

定理 2 在定理 1 的条件下, 由式(1)、(2)给出的有理逼近 $H(y)$ 在 $|y| < r$ 上内闭一致收敛于 $H(y)$ ($n \rightarrow +\infty$), 其截断误差 $R_N(y, r)$ 满足如下估计式

$$|R_N(y, r)| \leq C_j / N^{2j+1} \quad |y| < r, r \leq R \tag{3}$$

其中 C_j 是与 N 无关的常数, 而 j 为 $H(y)$ 的可微分阶数.

2 无界区域上的有理逼近

对任意单连通区域上的有理逼近问题, 在一定条件下可以通过解析映射转化为单位圆盘上的有理逼近问题. 事实上, 已有 Riemann 定理.

定理 3 除了整个平面或去掉一个点的平面外, 每个单连通区域 D 都可以用一个解析函数双方单值且保角地映射成单位圆的内部.

基于定理 1~3, 可以通过解析映射将定理 1、2 推广到无界区域之中, 限于篇幅, 作者在此仅考虑 p 平面内无界区域

$$\overline{D_1} = \{p \mid |p - p_0| \geq R\}$$
$$\overline{D_2} = \{p \mid \operatorname{Re} p \geq p_0\}$$

上解析函数 $F(p)$ 的处理.

2.1 D_1 上解析函数 $F(p)$ 的有理逼近

对 D_1 上解析函数 $F(p)$ 的有理逼近, 可以通过图 1 所示的解析映射

$$\begin{cases} p = \frac{p_0 z - R}{z} \\ z = \frac{-R}{p - p_0} \end{cases} \quad p \in D_1, |z| < 1$$

将问题转化为 $|z| < 1$ 上解析函数 $H(z)$ 的有理逼近.

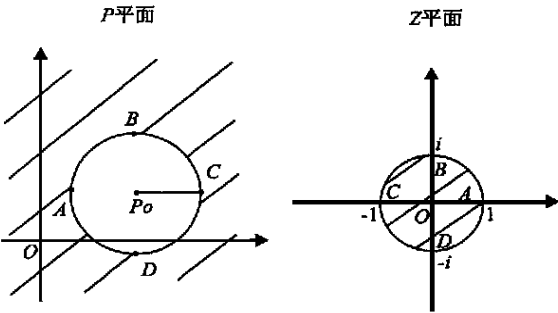


图 1 D_1 上的解析映射
Fig. 1 Analytic mapping on D_1

即

$$F(p) = F\left(\frac{p_0 z - R}{z}\right) \triangleq H(z) \quad |z| < 1$$

的有理逼近, 进而由定理 1, 并将 $z = \frac{R}{p - p_0}$ 回代即得

$$\begin{aligned} F(p) &= H(z) \sim H_N(z) = \\ &= \frac{r}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{a(\theta_k) + b(\theta_k)}{z^2 + c(\theta_k)z + r^2} + \\ &+ i \frac{r}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{d(\theta_k) + e(\theta_k)}{z^2 + c(\theta_k)z + r^2} = \\ &= \frac{r}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{b^*(\theta_k)(p - p_0)^2 - Ra^*(\theta_k)(p - p_0)}{r^2(p - p_0)^2 - Rc^*(\theta_k)(p - p_0) + R^2} + \\ &+ i \frac{r}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{e^*(\theta_k)(p - p_0)^2 - Rd^*(\theta_k)(p - p_0)}{r^2(p - p_0)^2 - Rc^*(\theta_k)(p - p_0) + R^2} \end{aligned}$$
$$|z| < r \leq 1, |p - p_0| > \frac{R}{r} (r \leq 1) \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} a^*(\theta_k) = \operatorname{Im} F(p_k) \sin \theta_k - \operatorname{Re} F(p_k) \cos \theta_k \\ b^*(\theta_k) = r \operatorname{Re} F(p_k) \\ c^*(\theta_k) = -2r \cos \theta_k \\ d^*(\theta_k) = -\operatorname{Im} F(p_k) \cos \theta_k - \operatorname{Re} F(p_k) \sin \theta_k \\ e^*(\theta_k) = r \operatorname{Im} F(p_k) \\ p_k = p_0 - \frac{R}{r} \cos \theta_k + i \frac{R}{r} \sin \theta_k \\ \theta_k = \frac{k\pi}{N} \quad k = 1, \dots, 2N \end{cases}$$

2.2 D_2 上解析函数 $F(p)$ 的有理逼近
见图 2.

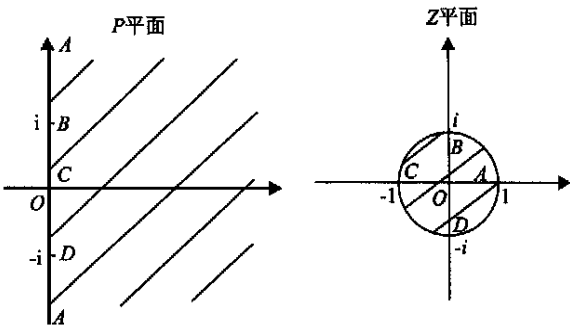


图 2 D_2 上的解析映射
Fig. 2 Analytic mapping on D_2

不失一般性, 令 $p_0 = 0$, 对 $\operatorname{Re} p > 0$ 上的解析函数 $F(p)$, 类似于上段方法, 通过解析映射

$$\begin{cases} p = \frac{1+z}{1-z} \\ z = \frac{p-1}{p+1} \end{cases} \quad p \in D_2, |z| < 1$$

使得

$$\begin{aligned} F(p) &\sim F^*(p) = \\ &= \frac{r}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{a^{**}(\theta_k)(p^2 - 1) + b^{**}(\theta_k) + (p + 1)^2}{r^2(p + 1)^2 + c^{**}(\theta_k)(p^2 - 1) + (p - 1)^2} + \end{aligned}$$

$$i \frac{r}{2N+1} \sum_{k=1}^{2N} \frac{d^{**}(\theta_k)(p^2-1)+e^{**}(\theta_k)+(p+1)^2}{r^2(p+1)^2+c^{**}(\theta_k)(p^2-1)+(p-1)^2} \quad \left| \frac{p-1}{p+1} \right| < r \leq 1 \quad (6)$$

其中除

$$p_k = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta_k} + i \frac{2r\sin\theta_k}{1+r^2-2r\cos\theta_k}$$

之外,其余系数与式(5)相同.

2.3 收敛性与误差估计

类似于文献[3]中的方法,不难证明如下定理.
定理4 设 $F(p)$ 在 $\overline{D_1}$ 上解析, 则其有理逼近(4)在 D_1 内内闭一致收敛于 $F(p)$ (即对任意的 $R^* > R$, $F_N(p)$ 在 $|p-p_0| \geq R^*$ 内一致收敛于 $F(p)$), 其误差估计为

$$|R_N^*(p, r)| \leq \frac{C_j^*}{N^{2j+1}} \quad |p-p_0| > \frac{R}{r}, \quad r \leq 1$$

其中

$$C_j = 2rM_j(p, r)\zeta(2j+1)$$
$$M_j(p, r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \frac{F(p_0) - \frac{R}{r}e^{-i\theta}}{p_0 - \frac{R}{r}e^{-i\theta} - p} \right|^{2j+1}$$

与 N 无关, 而 $\zeta(2j+1)$ 为 Riemann ζ 函数, j 为使 $\left| \frac{F(p_0) - \frac{R}{r}e^{-i\theta}}{p_0 - \frac{R}{r}e^{-i\theta} - p} \right|^{2j+1}$ 连续的正整数.

定理5 设 $F(p)$ 在 D_2 解析, 则其有理逼近(6)在 D_2 内内闭一致收敛于 $F(p)$, 其误差估计为

$$|R_N^{**}(p, r)| \leq \frac{C_j^{**}}{N^{2j+1}}, \quad \left| \frac{p-1}{p+1} \right| < r, \quad r \leq 1.$$

参考文献

[1] BAKER G A, GRAVES-MIRRISS P R. Pade Approximation (part II)[M]. MA: Addison-Wesley, 1981.
[2] 储志俊, 蒋勇. 一类逼近算子的逼近度与保解析性[J]. 江苏理工大学学报, 1994, 15(2): 99~102.
[3] JIANG YONG. Rational approximation by the method of numerical integrations[J]. Approximation optimization and computing 1990 7: 101~103.

3 应用举例

由定理1~3及公式(4)和(6)不难看出, 本文所述的有理逼近 $F(p)$ 、 $F^*(p)$ 保留了 $F(p)$ 的解析特性, 并且为低次分式结构, 而且具有继承性, 可以应用于 Laplace 变换的数值反演.

限于篇幅, 此处仅给出 D_1 上解析函数 $F(p)$ 的数值反演结果与计算例子, 详细的讨论以及 D_2 上解析函数的数值反演问题将另文给出.

定理4* 设 $F(p)$ 为生成函数, 并且在足够大的区域

$$\overline{D} = \{p \mid |p-p_0| \geq k\}$$

上解析, 则实的决定函数 $f(t)$ 的一个逼近为

$$f(t) \sim f_N(t) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{(p_0 - \frac{R}{r} \cos \theta_k)t} \{ A_k^* \cos[\frac{R}{r} \sin \theta_k t] + B_k^* \sin[\frac{R}{r} \sin \theta_k t] \} \quad |p-p_0| > \frac{R}{r}, \quad r \leq 1$$

其中

$$\begin{cases} A_k^* = -\frac{R}{r} [\operatorname{Re} F(p_k) \cos \theta_k + \operatorname{Im} F(p_k) \sin \theta_k] \\ B_k^* = \frac{R}{r} [\operatorname{Im} F(p_k) \cos \theta_k - \operatorname{Re} F(p_k) \sin \theta_k] \end{cases} \quad k=1, \dots, 2N$$

算例 考虑生成函数 $F(p) = \frac{20}{10p-1}$, 由定理4*, 其数值反演公式为

$$f_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{2N} e^{(\frac{1}{10} - \frac{2}{r} \cos \theta_k)t} \cos[\frac{2}{r} \sin \theta_k t]$$

分别取 $N=5, 10$; 取 $r=1$. 对 $f_N(t)$ 进行了计算, 并与精确解进行比较, 相应的误差仅为 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 量级. 而实际上, 可以证明定理4* 中的 $f_N(t)$ 在闭区域上一致收敛于 $f(t)$.

(责任编辑: 秦和平 李春丽)