

文章编号:1009-038X(2001)05-0543-02

内孔固支圆板在轴对称线布力矩作用下 弯曲变形的解析解

范本隽, 张志森

(江南大学 机械工程学院, 江苏 无锡 214063)

摘 要: 高剪切均质机转子的底盘可看作轴对称力矩作用下的内孔固支圆板. 作者推导了计算其弯曲变形的解析法公式, 从而为此类转子结构参数优化提供了依据.

关键词: 转子; 轴对称板; 弯曲

中图分类号: O 343.2

文献标识码: A

The Analytic Solution for the Bending of the Inner Edge Clamped Circular Plate Subjected to An Axisymmetric Moment

FAN Ben-jun, ZHANG Zhi-sen

(School of mechanical engineering, South Yangtze University, Wuxi 214063, China)

Abstract: The bottom disk of the rotator of a high shear homogenizer was considered as an inner edge clamped circular plate subjected to some axisymmetric moments, and its bending deformation was studied in this paper using an analytic method. The formulas obtained may be used in the procedure of structural parameter optimization for this kind of rotator.

Key words: rotator; axisymmetric plate; bending

高剪切均质机的转子, 是在底盘上排列若干圈梳状齿形成, 如图 1 所示. 高速旋转时, 由于强大的离心力作用引起底盘和齿的变形. 其中, 底盘弯曲变形使齿根部产生转角是导致齿顶径向位移的重要因素. 为对转子进行结构参数优化, 需将底盘弯曲变形用转子的各结构参数进行解析表达. 作者主要研究作用于齿上的离心力载荷引起的底盘挠度和转角. 由于齿沿圆周向紧密排列, 其离心力向底盘中面简化后可近似看作若干圈轴对称线布力和轴对称线布力矩. 底盘弯曲主要由后者引起, 该问题可简化为内孔固支圆板在轴对称线布力矩作用下的弯曲问题.

1 控制微分方程及定解条件

计算简图如图 2 所示. 设 R_1 为底盘的内半径, R_2 为齿 i 位置的半径, R_3 为齿 j 位置的半径, t 为底盘厚度, h 为齿高. 并设材料的弹性模量为 E , 泊松比为 μ , 质量密度为 ρ , 转子角速度为 ω . F 、 m 为齿 i 的离心力向底盘中面移置并简化得到的一圈线布径向力和力矩, 其大小为 $F = \rho \frac{ns\delta h}{2\pi} \omega^2$ 及 $m = F(\frac{h}{2} + \frac{t}{2})$. 式中 n 为一圈上分布的齿数, s 为平均齿宽, δ 为齿厚.

收稿日期: 2001-04-24; 修订日期: 2001-09-04.

作者简介: 范本隽(1947-), 男, 江苏苏州人, 工学硕士, 副教授.

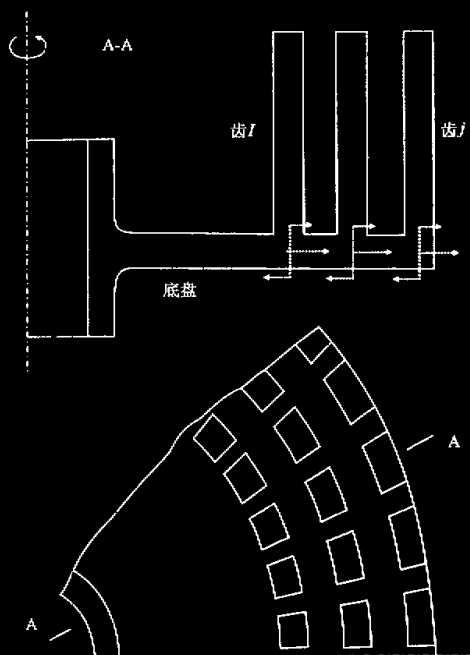


图 1 转子示意图

Fig.1 The rotator figure

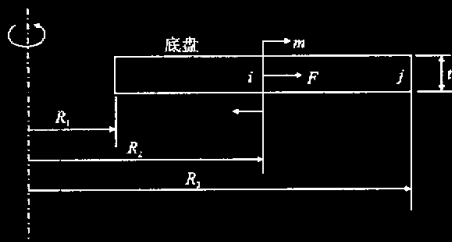


图 2 计算简图

Fig.2 The calculate figure

线布力矩 m 作用下圆板弯曲微分方程为

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{dw}{dr} = 0 \quad (1)$$

定解条件为: $r = R_1$ 处挠度 $w = 0$ 及转角

$$\Psi = \frac{dw}{dr} = 0; r = R_3 \text{ 处弯矩 } M_r = 0 \text{ 及剪力 } Q_r = 0.$$

并且在 $r = R_2$ 处挠度、转角连续。

2 初参数法求解

忽略自重时, $r = R_1$ 处剪力 $Q_r = 0$, 故 4 个初参数 $w, \frac{dw}{dr}, M_r, Q_r$ 中仅 M_r 不为零. I 区内的通解可用初参数表为

$$w = \frac{1}{4D} R_1^2 (M_r)_1 \left[-\left(\frac{r_1^2}{R_1^2} - 1\right) + 2 \ln \frac{r_1}{R_1} \right]$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{2D} R_1^2 (M_r)_1 \left(-\frac{r}{R_1} + \frac{R_1}{r} \right)$$

$$M_r = \frac{1}{2} (M_r)_1 \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{R_1^2}{r^2} \right]$$

$$Q_r = 0^{[1]} \quad (2)$$

式中 $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ 为弯曲刚度.

在 $r = R_2^-$ 处及 $r = R_2^+$ 处:

$$(w)_2^+ = (w)_2^- =$$

$$\frac{1}{4D} R_1^2 (M_r)_1 \left[-\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1\right) + 2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_2^+ = \left(\frac{dw}{dr}\right)_2^- = \frac{1}{2D} R_1 (M_r)_1 \left(-\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$(M_r)_2^+ = (M_r)_2^- + m =$$

$$\frac{1}{2} (M_r)_1 \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{R_1^2}{R_2^2} \right] + m$$

$$(Q_r)_2^+ = (Q_r)_2^- = 0 \quad (3)$$

II 区内的解可用 $(w)_2^+, \left(\frac{dw}{dr}\right)_2^+, (M_r)_2^+, (Q_r)_2^+$ 作为初参数来表示, 其中弯矩 M_r 表达式为

$$M_r = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (M_r)_1 \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{R_1^2}{R_2^2} \right] + m \right]$$

$$\left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{R_2^2}{r^2} \right] - \frac{1 - \mu^2}{4} \frac{R_1}{R_2} (M_r)_1$$

$$\left(-\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right) \quad (4)$$

在 $r = R_3$ 处 $M_r = 0$, 代入解出

$$(M_r)_1 = -2m \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{R_2^2}{R_3^2} \right] / \left[(1 + \mu) + \right.$$

$$\left. (1 - \mu) \frac{R_1^2}{R_2^2} \right] \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{R_2^2}{R_3^2} \right] +$$

$$(1 - \mu^2) \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \left(1 - \frac{R_2^2}{R_3^2} \right) \quad (5)$$

于是在 II 区左端的 $(w)_2^+, \left(\frac{dw}{dr}\right)_2^+, (M_r)_2^+, (Q_r)_2^+$ 均为已知, 以它们为初参数列出 II 区中挠度与转角表达式为

$$w = w_2^+ + R_2 \left(\frac{dw}{dr}\right)_2^+ \left[\frac{1 - \mu}{4} \left(\frac{r^2}{R_2^2} - 1\right) + \right.$$

$$\left. \frac{1 + \mu}{2} \ln \frac{r}{R_2} \right] + \frac{1}{4D} R_2^2 (M_r)_2^+ \left[-\left(\frac{r^2}{R_2^2} - 1\right) + \right.$$

$$\left. 2 \ln \frac{r}{R_2} \right] \frac{dw}{dr} = \left(\frac{dw}{dr}\right)_2^+ = \left(\frac{1 - \mu}{2} \frac{r}{R_2} + \right.$$

$$\left. \frac{1 + \mu}{2} \frac{R_2}{r} \right) + \frac{1}{2D} R_2 (M_r)_2^+ \left(-\frac{r}{R_2} + \frac{R_2}{r} \right)$$

(下转第 549 页)

(上接第 544 页)

以 $r = R_j$ 代入 (5) 式即得线布力矩 m 作用引起的齿 j 根部的挠度 w_j 和转角 $\Psi_j = (\frac{dw}{dr})_j$.

3 数值结果及讨论

设转子尺寸为: $R_1 = 17.5 \text{ mm}$, $R_2 = 66.5 \text{ mm}$, $R_3 = 82.5 \text{ mm}$, $t = 6 \text{ mm}$, 在 $r = R_2$ 处有一圈梳状齿, 齿高 35 mm, 齿厚 6 mm, 材料弹性模量 $E =$

200 GPa, 泊松比 $\mu = 0.3$. 转子转速 $n = 5000 \text{ r/min}$. 用本文推导的公式计算得 $\Psi_j = 0.003844 \text{ rad}$, 而三维有限元计算结果为 0.003920 rad . 从而证明本文推导的计算公式是正确的.

(5)、(3)、(6)式是解析法计算的基本公式, 在此基础上应用叠加原理可计算有若干圈齿的转子. 再进行展开和简化处理后, 可进行结构参数优化工作.

参考文献:

[1] 黄克智. 板壳理论[M]. 北京:清华大学出版社, 1987.

(责任编辑:朱明)