文章编号：1009－038X(2001)06－0624－06

混沌系统反馈控制的 Melnikov 分析

方燕燕[1]， 徐振源[2]， 蔡朝洪[3]

(1. 江南大学 信息工程学院，江苏 无锡 214036；2. 江南大学 计算科学与信息传播系，江苏 无锡 214064；3. 江南大学 通信与控制工程学院，江苏 无锡 214036)

摘　要：提出一种新的对混沌系统进行控制的方法. 通过外加一个基于系统变量的简单反馈控制项 $+Px$，调整反馈控制项中的参数值 P，引导系统转化为低周期运动. 同时，以 Duffing 系统为例，用 Melnikov 方法，较成功地解释了该方法进行混沌控制的数学物理机理. 计算机仿真的结果表明了理论分析的正确性及用于实践的可行性.

关键词：混沌控制；反馈；Melnikov 方法；Melnikov 函数

中图分类号：TP 13　　**文献标识码**：A

Melnikov Analysis on Feedback Control of Chaotic Dynamics System

FANG Yan-yan[1]， XU Zhen-yuan[2]， CAI Chao-hong[3]

(1. School of Information Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214036, China; 2. Department of Computation Science & Information Communication, Southern Yangtze University, Wuxi 214064, China; 3. School of Communication & Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214036, China)

Abstract: There are many methods to control chaos. A new method was proposed to achieve control over chaotic motion in some typical dynamical systems in this paper by using feedback based on system variables. At the same time, based on Duffing System, Melnikov 's perturbation method was used to explain the control mechanism. Numerical simulation results were used to demonstrate the effectiveness of the new positive feedback control methodology.

Key words: chaotic control; feedback; Melnikov 's method; Melnikov 's function

自然界中的混沌现象是很普遍的. 几乎可以说，自然界中的绝大部分运动都是混沌运动，规则运动相对地只在局部的范围和较短的时间内存在. 但在现实生活中，混沌运动往往是有害的，所以混沌研究的主要方向之一是混沌控制的途径和方法.

混沌系统的控制是非线性科学及复杂性科学中一个富有挑战性又意义重大的课题. 混沌控制的研究兴起于 20 世纪 90 年代，有 3 种不同的控制方案[1,2]：第一种方案是共振控制，由 A. Hubler 和 H. E. Luscher 提出，通过引入一类无反馈外激励型控制，使系统呈现周期性态；第二种方案是反馈控制，由 A. M. Bloch 和 L. E. Marsden 提出，通过建立一种有反馈的参数修改机制，控制同宿轨道；第三种方案是随机控制，由 A. Hubler 和 T. B. Fowler 提出，分别利用统计性预测和基于 Kalman 滤波的状态估计. 迄今为止，混沌控制方兴未艾，目前有 OGY 控制法、OPF 技术、外力反馈控制法、延迟反馈控制法、自适应控制法、周期扰动控制法、传递无反馈控

收稿日期：2001－05－20； 修订日期：2001－10－19.

基金项目：国家自然科学基金项目(10071033)资助课题.

作者简介：方燕燕(1978－)，女，安徽芜湖人，计算机应用硕士研究生.

万方数据

制法、转移无反馈控制法以及神经网络控制法等[3~8].

然而,虽然有理论上的一些成功,但不难理解在应用工程中,复杂的控制方法往往是设备昂贵且干扰因素众多,并不实用.正是基于这种考虑,作者提出一种简单实用的混沌控制方法,通过外加一个基于系统变量的反馈控制项 $+Px$,调整反馈控制项中的参数值 P,快速地引导系统转化为希望的周期运动.本文安排两部分:其一,通过计算机仿真,对各种典型的混沌系统进行控制;其二,运用 Melnikov 方法,详细解释控制的数学物理机理.

1　反馈控制仿真

考虑定义在 n 维 Euclid 空间 R^n 中的区域 U 上的自治系统:

$$\dot{x}=f(x)\qquad x\in U\subset R^n,\quad t\in R \tag{1}$$

其中,f 为非线性光滑向量函数.

本文提出的控制方法是:在引起自治系统出现混沌的一个关键的非线性函数 $\dot{x}_k=f_k(x)$ 中,加上一个基于系统变量的反馈控制项 Px_m,可得:

$$\dot{x}_k=f_k(x)+Px_m\qquad k,m\in\{1,2,\cdots,n\} \tag{2}$$

其中,P 为反馈控制项中的参数值,也即反馈增益.其余的 $f_i,i\in\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{k\}$ 不变,通过调整反馈增益,进行混沌控制.

对于非自治系统,可以通过提高系统维数等方法,将其转化为自治系统.

以下为对几个典型混沌模型进行计算机仿真的结果,效果很好.

1.1　带负线性刚度项 Duffing 振子方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\varepsilon\gamma x_2+ax_1-cx_1{}^3+\varepsilon f\cos\omega t\end{cases} \tag{3}$$

其中,$a=1,c=1,\omega=1,\varepsilon\gamma=0.25$,当 $\varepsilon f\geqslant 0.265$ 时系统出现稳态混沌.反馈控制 Px_1 项加在系统(3)的第二式上.

取 $\varepsilon f=0.35$,反馈增益 $P=0.5$,系统(3)由混沌态变为周期解.原系统与受控系统的相平面图如图 1 所示.

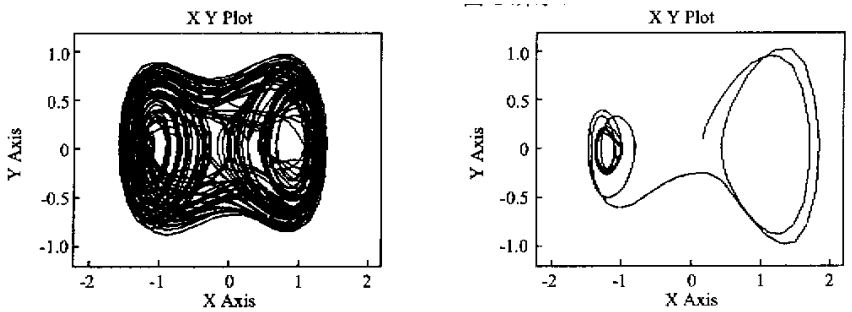

图 1　Duffing 振子的混沌吸引子与受控系统的相轨迹

Fig.1　The trajectory of original chaos and controlled pattern on Duffing system

1.2　上田振子方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{c}{m}x_2-\dfrac{k}{m}x_1{}^3+F_0\cos\omega t\end{cases} \tag{4}$$

其中,$m=1,k=1,\omega=1,c=0.05$,当 $F_0=7.5$ 时系统出现稳态混沌.反馈控制项 Px_1 加在系统(4)的第二式上.

取反馈增益 $P=1.0$,系统(4)由混沌态变为周期解.原系统与受控系统的相平面图如图 2 所示.

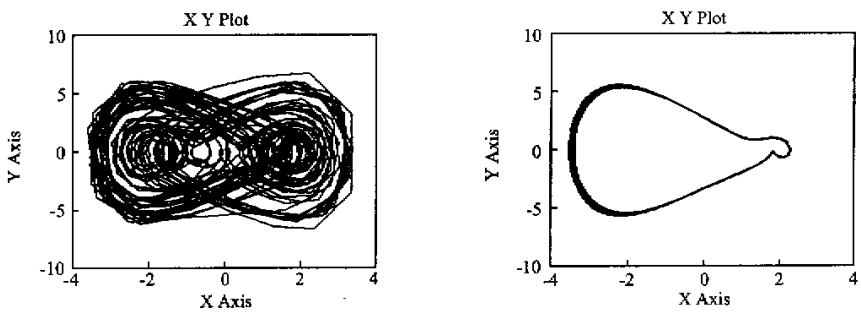

图 2　上田振子的混沌吸引子与受控系统的相轨迹

Fig.2　The trajectory of original chaos and controlled pattern Shan Tian system

万方数据

1.3 强迫 Brusselator 振子方程

$$\begin{cases}\dot{x} = A - (B+1)x + x^2 y + \alpha\cos\omega t \\ \dot{y} = Bx - x^2 y\end{cases} \tag{5}$$

其中，$A=0.4$，$B=1.2$，$\omega=0.85$，当 $\alpha=0.06$ 时系统出现稳态混沌. 反馈控制项 Px 加在系统(5)的第一式上.

取反馈增益 $P=0.08$，系统(5)由混沌态变为周期解. 原系统与受控系统的相平面图如图 3 所示.

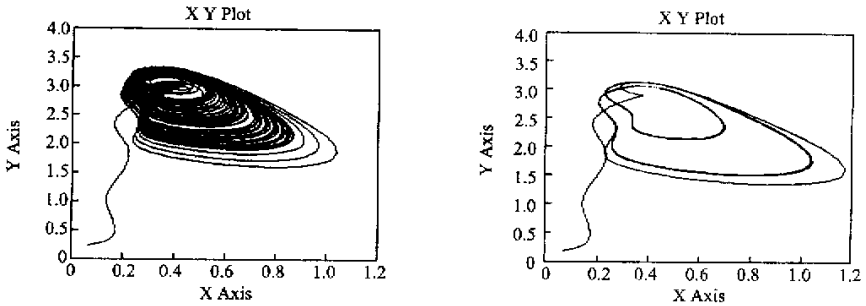

图 3 Brusselator 振子的混沌吸引子与受控系统的相轨迹

Fig. 3 The trajectory of original chaos and controlled pattern on Brusselator system

1.4 Sine-Gordon 截断形式方程

$$\begin{cases}\ddot{c} = -\varepsilon\alpha\dot{c} - c + \dfrac{1}{6}c^3 + \dfrac{1}{4}cb^2 + \varepsilon\gamma\cos\omega t \\ \ddot{b} = -\varepsilon\alpha\dot{b} - b - (\dfrac{2\pi}{L})^2 b + \dfrac{1}{8}b^3 + \dfrac{1}{2}c^2 b\end{cases} \tag{6}$$

其中，当 $\varepsilon\alpha=0.04$，$L=12$，$\omega=0.88$，$\varepsilon\gamma=0.10$ 时系统出现稳态混沌. 反馈控制项 Pc 加在系统(6)的第一式上.

取反馈增益 $P=0.25$，系统(6)由混沌态变为周期解. 原系统与受控系统的相平面图如图 4 所示.

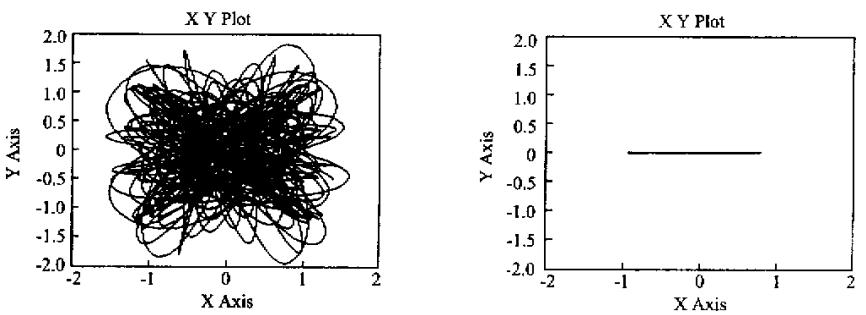

图 4 Sine-Gordon 方程振子的混沌吸引子与受控系统的相轨迹

Fig. 4 The trajectory of original chaos and controlled pattern on Sine-Gordon system

1.5 Lorenz 方程

$$\begin{cases}\dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = (r - z)x - y \\ \dot{z} = -bz + xy\end{cases} \tag{7}$$

其中，$\sigma=10$，$r=28$，$b=8/3$ 时系统出现稳态混沌. 反馈控制项 Pz 加在系统(7)的第三式上.

取反馈增益 $P=2.3$，系统(7)由混沌态变为周期解. 原系统与受控系统的相平面图如图 5 所示.

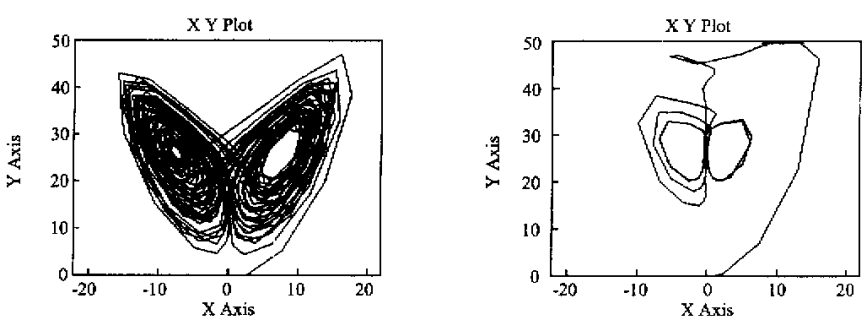

图 5 Lorenz 方程的混沌吸引子与受控系统的相轨迹

Fig. 5 The trajectory of original chaos and controlled pattern on Lorenz system

万方数据

2　基于 Melnikov 方法的控制机理分析

迄今为止,研究混沌现象的解析方法,仅有 Melnikov 方法和 Shilnikov 方法两种[9,10]. 由于 Shilnikov 方法需要判定系统是否存在鞍焦型同宿轨道,而这相当困难,因此 Melnikov 方法应用更为广泛. 本文也将采用 Melnikov 解析方法,从理论上解释反馈控制混沌的机理.

以带负线性刚度项 Duffing 振子为例,其描述方程为:

$$\ddot{x}+\varepsilon\gamma\dot{x}-\alpha x+cx^3=\varepsilon f\cos\omega t$$

加上一个基于 x 的反馈控制项 Px,可得受控方程:

$$\ddot{x}+\varepsilon\gamma\dot{x}-\alpha x+cx^3=\varepsilon f\cos\omega t+Px \tag{8}$$

如前图 1 计算机仿真结果,可将系统从混沌态引导到周期轨道.

2.1　Smale 意义下的混沌

将(8)式改写为:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\varepsilon\gamma x_2+ax_1-cx_1^3+\varepsilon f\cos\omega t+Px_1\end{cases} \tag{9}$$

当 $\varepsilon=0$,$P=0$ 时,方程所描述的为 Hamilton 系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=ax_1-cx_1^3\end{cases}$$

双曲鞍点(0,0)的稳定流形和不稳定流形重合构成的同宿轨道满足哈密顿量:

$$H(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2{}^2-\frac{1}{2}ax_1{}^2+\frac{1}{4}cx_1{}^4=h$$

当 $h=0$ 时,可得其同宿轨道为:

$$\begin{cases}x_1{}^0(t)=\pm\sqrt{\dfrac{2a}{c}}\operatorname{sech}\sqrt{a}t\\ x_2{}^0(t)=\mp\sqrt{\dfrac{2}{c}}a\operatorname{sech}\sqrt{a}t\ \operatorname{th}\sqrt{a}t\end{cases}$$

当 $P=0$ 时,将(9)式对应于 Melnikov 方法中的非自治系统:

$$\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(x,t)\qquad x\in R^2$$

则:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\quad f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\ ax_1-cx_1{}^3\end{bmatrix}$$

$$g(x,t)=\begin{bmatrix}0\\ -\gamma x_2+f\cos\omega t\end{bmatrix}$$

于是可得:

$$tr(Df)=tr\begin{bmatrix}0 & 1\\ a-3cx_1{}^2 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$f(x^0(t))\wedge g(x^0(t),t+\tau)=$$
$$(-\gamma x_2{}^0(t)+f\cos\omega(t+\tau))x_2{}^0(t)$$

推出 $P=0$ 时的 Melnikov 函数为:

$$M_{\pm}{}^0(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x^0(t))\wedge g(x^0(t),t+\tau)$$
$$e^{-\int_0^t tr(Df(x^0(z)))dz}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[-\gamma(x_2{}^0(t))^2+$$
$$f\cos\omega(t+\tau)x_2{}^0(t)]dt=-\frac{4a^{3/2}}{3c}\gamma\pm$$
$$\pi f\omega\sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sech}\frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}}\sin\omega\tau \tag{10}$$

当 Melnikov 函数具有简单零点时,系统具有 Smale 意义下的混沌. 可推出:

$$\varepsilon f>\frac{4a^{3/2}\varepsilon\gamma}{3\pi\omega\sqrt{2c}}\operatorname{ch}\frac{\pi\omega}{2\sqrt{a}} \tag{11}$$

当 $a=1$,$c=1$,$\omega=1$,$\varepsilon\gamma=0.25$ 时,得 $\varepsilon\gamma$ 的临界值为 0.188.

同理 $P\neq0$ 时,可将$(a+p)$代换 a,即:

$$\varepsilon f>\frac{4(a+P)^{3/2}\cdot\varepsilon r}{3\pi\omega\sqrt{2c}}\operatorname{ch}\frac{\pi\omega}{2\sqrt{a+P}}$$

易知加上反馈项后,临界值将提高:

$$P=1.0\qquad \varepsilon f>\frac{4\cdot2^{3/2}\cdot0.25}{3\pi\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=0.3570$$

$$P=0.5\qquad \varepsilon f>\frac{4\cdot1.5^{3/2}\cdot0.25}{3\pi\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2\sqrt{1.5}}=0.2677$$

$$P=1.5\qquad \varepsilon f>\frac{4\cdot2.5^{3/2}\cdot0.25}{3\pi\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2\sqrt{2.5}}=0.4553$$

在原系统处于混沌态时,如 $\varepsilon f=0.35$ 时,加上反馈项后,由于临界值的提高,同宿轨道将不再横截相交,从而抑制了混沌,如图 1 所示.

2.2　周期解的存在性

如前所述,(9)式中的哈密顿量如下:

$$H(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2{}^2-\frac{1}{2}ax_1{}^2+\frac{1}{4}cx_1{}^4=h$$

当 $h\neq0$ 时,可得其周期轨道为:

$$\begin{cases}x_1{}^k(t)=\pm\sqrt{\dfrac{2a}{c(2-k^2)}}\operatorname{dn}\left(\dfrac{\sqrt{a}t}{\sqrt{2-k^2}},k\right)\\ x_2{}^k(t)=\mp\sqrt{\dfrac{2a}{c(2-k^2)}}(-k^2)\sqrt{\dfrac{a}{2-k^2}}\\ \qquad\qquad\operatorname{Cn}\left(\dfrac{\sqrt{a}t}{\sqrt{2-k^2}},k\right)\operatorname{Sn}\left(\dfrac{\sqrt{a}t}{\sqrt{2-k^2}},k\right)\end{cases}$$

而周期轨道的周期为:

$$\frac{2k\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{a}}=\frac{2\pi m}{\omega n}=\frac{m}{n}T$$

其中 m,n 为互质素数.

当 $P=0$ 时,将(9)式对应于 Melnikov 方法中的非自治系统:

$$\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(x,t)\qquad x\in R^2$$

万方数据

与前面所得结果一致.仅有如下变化：

$$f(x^k(t)) \wedge g(x^k(t), t+\tau) = (-\gamma x_2{}^k(t) + f\cos\omega(t+\tau)) x_2{}^k(t)$$

推出 $P=0$ 时的 Melnikov 函数为：

$$M_{\pm}{}^k(t_0) = \int_0^{mT} f(x^k(t)) \wedge g(x^k(t), t+\tau)$$

$$e^{-\int_0^t tr(Df(x^k(z)))dz} dt = \int_0^{mT} [-\gamma(x_2{}^k(t))^2 + f\cos\omega(t+\tau) x_2{}^k(t)] dt = -\gamma J_1(m,n) - fJ_2(m,n,\omega)\sin\omega\tau \quad (12)$$

其中：

$$J_1(m,n) = \int_0^{mT} (x_2{}^k(t))^2 dt = \int_0^{mT} \frac{2a}{c(2-k^2)}(k^4) \frac{a}{2-k^2} \mathrm{Cn}^2\left(\frac{\sqrt{a}t}{\sqrt{2-k^2}}, k\right) \mathrm{Sn}^2\left(\frac{\sqrt{a}t}{\sqrt{2-k^2}}, k\right) dt$$

$$\underline{\zeta = \sqrt{a}t/\sqrt{2-k^2}} \int_0^{2nK(k)} \frac{2a^2k^4}{c(2-k^2)^2} \frac{\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{a}}$$

$$\mathrm{Cn}^2\zeta \cdot \mathrm{Sn}^2\zeta \cdot d\zeta = \frac{a^{3/2}}{c(2-k^2)^{3/2}} \frac{2}{3}[(2-k^2(m,n)) \cdot 2E(k(m,n)) - 4k'^2(m,n)K(k(m,n))]$$

$K(k)$,$E(k)$为椭圆函数.

$$J_2(m,n,\omega) = \int_0^{mT} -\frac{\cos\omega(t+\tau)}{\sin\omega\tau} \cdot x_2{}^k(t) dt = \int_0^{mT} \sin\omega t \cdot \sqrt{\frac{2a}{c(2-k^2)}}(-k^2) \sqrt{\frac{a}{2-k^2}} \mathrm{Cn}\left(\frac{\sqrt{a}t}{\sqrt{2-k^2}}, k\right) \mathrm{Sn}\left(\frac{\sqrt{a}t}{\sqrt{2-k^2}}, k\right) dt$$

$$\underline{\zeta = \sqrt{a}t/\sqrt{2-k^2}} \int_0^{2nK(k)} \frac{-\sqrt{2}ak^2}{\sqrt{c}(2-k^2)} \sin\omega t \frac{\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{a}}$$

$$\mathrm{Cn}\zeta \cdot \mathrm{Sn}\zeta \cdot d\zeta = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{c}} \pi \frac{\omega}{\sqrt{a}} \mathrm{sech} \frac{\pi m K'(k(m,1))}{K(k(m,1))}$$

当 $n=1$ 时，$J_2(m,n,\omega)=0$；

当 $n\neq 1$ 时，考虑周期 1 解情况，即 $m=1$，则 k 必须满足 $2K\sqrt{2-k^2} = 2\pi$.

查椭圆函数表：

$k=0.9825$,
$E(k(1,1)) = 1.044804$,
$K(k(1,1)) = 3.0834$
$k'^2 = 1-k^2 = 0.03469$,
$k' = 0.1868$,
$K'(k) = K(k') = 1.5847$

当 Melnikov 函数具有简单零点时，系统具有 Smale 意义下的混沌.可推出：

$$\frac{\varepsilon f}{\varepsilon\gamma} > \frac{J_1(m,1)}{J_2(m,1)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}a}{\sqrt{c}(2-k^2)^{3/2}} \frac{[2-k^2(m,1)\cdot 2E(k(m,1)) - 4k'^2(m,1)K(k(m,1))]}{\pi\omega\mathrm{sech}\frac{\pi m K'(k(m,1))}{K(k(m,1))}}$$

代入数值可得：

$$\frac{\varepsilon f}{\varepsilon\gamma} > \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 1}{\sqrt{1}(2-0.9825^2)^{3/2}} \frac{(2-0.9825^2\cdot 2\cdot 1.044804 - 4\cdot 0.003469\cdot 3.08534)}{\pi\cdot 1\cdot\mathrm{sech}\frac{\pi\cdot 1\cdot 1.5847}{3.08534}} =$$

$0.64525 \Rightarrow \varepsilon f > 0.1613$

同理 $P\neq 0$ 时，可将$(a+P)$代换 a，即：

$$\frac{\varepsilon f}{\varepsilon\gamma} > \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}(a+P)}{\sqrt{c}(2-k^2)^{3/2}} \frac{[2-k^2(m,1)\cdot 2E(k(m,1)) - 4k'^2(m,1)K(k(m,1))]}{\pi\omega\mathrm{sech}\frac{\pi m K'(k(m,1))}{K(k(m,1))}}$$

当 $P=1.0$ 时，k 满足 $2K\sqrt{2-k^2} = 2\pi\sqrt{2}$

查椭圆函数表：

$k=0.9987$,
$E(k(1,1)) = 1.00600$,
$K(k(1,1)) = 4.330$
$k'^2 = 1-k^2 = 0.002598$,
$k' = 0.05097$,
$K'(k) = K(k') = 1.571810$

于是可得：

$$\frac{\varepsilon f}{\varepsilon\gamma} > \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2}{\sqrt{1}(2-0.9987^2)^{3/2}} \frac{(2-0.9987^2\cdot 2\cdot 1.0060 - 4\cdot 0.002598\cdot 4.330)}{\pi\cdot 1\cdot\mathrm{sech}\frac{\pi\cdot 1\cdot 1.571810}{4.330}} =$$

$0.8264 \Rightarrow \varepsilon f > 0.2066$

当 $P=0.5$ 时，k 满足 $2K\sqrt{2-k^2} = 2\pi\sqrt{1.5}$

查椭圆函数表：

$k=0.9952$,
$E(k(1,1)) = 1.01500$,
$K(k(1,1)) = 3.6970$
$k'^2 = 1-k^2 = 0.009577$,
$k' = 0.09786$,
$K'(k) = K(k') = 1.57470$

于是可得：

$$\frac{\varepsilon f}{\varepsilon\gamma} > \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 1.5}{\sqrt{1}(2-0.9952^2)^{3/2}} \times$$

万方数据

$$\frac{(2-0.9952^2\cdot 2\cdot 1.01500-4\cdot 0.009577\cdot 3.6970)}{\pi\cdot 1\cdot \operatorname{sech}\dfrac{\pi\cdot 1\cdot 1.57470}{3.6970}}=$$

$$0.86233\Rightarrow \varepsilon f>0.21558$$

因此,理论上讲,当 $\varepsilon f=0.35$ 时,原系统加上反馈后,可以由混沌态导入周期 1 轨道.

需要指出的是:理论计算与数值仿真存在误差.这一方面是由于 Melnikv 方法自身的缺陷造成的,Smale 马蹄意义下的混沌并非真正物理意义下的混沌,因而与数值仿真意义下的混沌存在差异;另一方面,计算机仿真的结果存在误差,其精确性取决于计算机硬件设备及仿真软件等综合条件.但是,毋庸置疑,Melnikov 分析已从定性上很好地解释了反馈引导带负线性刚度项 Duffing 振子从混沌态到周期 1 轨道的机理.

对于其它仿真结果,可以用类似 Melnikov 分析思想解释,这将在以后另文给出.

3　结　论

本文论述了一种简单实用的混沌控制方法,通过外加一个基于系统变量的反馈控制项 $+Px$,调整反馈控制项中的参数值 P,也即反馈增益,快速地引导系统转化为希望的周期运动.计算机仿真结果证明了其有效性及普适性.

另外,本文以计算机仿真典型混沌模型之一——带负线性刚度项 Duffing 系统为例,用混沌的微扰判据——Melnikov 方法,在严格意义下成功地解释了该方法进行混沌控制的数学物理机理.Melnikov 分析发现,反馈项 $+Px$ 实质是一作用明显的扰动项,它将系统参数拉出混沌区,破坏了原系统的 Smale 马蹄意义下的混沌,从而得到周期解.

参考文献:

[1] 吴祥兴,陈忠. 混沌学导论[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1997.

[2] FOWLER T B. Application of stochastic control techniques to chaotic nonlinear system[J]. **IEEE Trans on Automation and Control**,1989,34(2):201~205.

[3] OTT E, GREBOGI C, YORK J A. Controlling Chaos[J]. **Physics Review Letters**,1990,64(11):1196~1199.

[4] HUNT E R. Stabilizing high-periodic orbits in a chaotic system: The diode resonator[J]. **Physical Review Letter**, 1991,67(15):1953~1955.

[5] PYRAGAS K. Continous control of chaos by self-controlling feedback[J]. **Physics Letter A**,1992,170:421~428.

[6] HUBERMAN B A, LUMER E L. Dynamics of adaptive system[J]. **IEEE Trans on Circuit and Systems**,1990,37(4):547~550.

[7] 刘向东,黄文虎. 混沌系统延迟反馈控制的理论与实践研究[J]. 力学进展,2001,31(1):18~31.

[8] 王忠勇,蔡远利,贾冬等. 混沌系统的神经网络控制[J]. 决策与控制,2000,15(1):55~58.

[9] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M]. 上海:上海科技教育出版社,1995.

[10] 刘延柱,陈立群. 非线性动力学[M]. 上海:上海交通大学出版社,2000.

(责任编辑:秦和平)

万方数据