

一类非主型方程的定解问题

蔡 日 增

摘 要

本文讨论了非主型方程 $u_{xx} - x^{2k} u_{tt} + pu_t = 0$ 的 Cauchy 问题以及混合问题的适定性, 并用能量积分法证明了当 k 是奇数时, 问题的解是存在唯一的。

一、引 言

近年来, 关于非主型方程的研究进行了大量的工作。Treves, F.^[1] 研究了一类非主型方程始值问题的离散现象, 他对 Cauchy 问题

$$L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} + pu_t = 0 \quad (t > 0, p \text{ 是常数})$$

证明了具有非零解的充分必要条件为 $p = 1, 3, 5, \dots$ 。王光寅等^{[2][3]} 作了重要的推广, 并对 $L_p u = 0$ 的始值问题的离散现象进行了详尽的研究。王传芳^[4] 考虑了混合问题

$$\begin{cases} L_p u = 0 & (x > 0, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), & u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \\ u(0, t) = \mu(t) \end{cases}$$

并证明了当 $p \neq 3, 7, 11, \dots$ 时, 混合问题的解不仅是存在的, 而且也是唯一的。

本文的目的是对非主型方程 $L_p u = 0$ 作一个推广, 讨论非主型方程 $u_{xx} - x^{2k} u_{tt} + pu_t = 0$ 。文中对这类方程的 Cauchy 问题以及混合问题的适定性进行了研究, 并用能量积分法证明了当 k 是奇数, $p < 0$ 时, 问题的解是存在唯一的。

二、关于 Cauchy 问题

我们将讨论 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{xx} - x^{2k} u_{tt} + pu_t = 0 & (t > 0, p < 0) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), & u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \end{cases} \quad (1)$$

为了更说明问题起见, 在下面所讨论的数据 φ_1, φ_2 以及 $u(x, t)$ 都是 C^∞ 的, 并且为了保证所讨论的解 $u(x, t)$ 在其定义域上是 C^∞ 的, 我们简单地假设: $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 以原点为无限阶

零点。

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 我们考虑下述严格双曲方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{xx} - (x^{2k} + \varepsilon)u_{tt} + pu_t = 0 & (t > 0, p < 0) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \end{cases} \quad (2)$$

引理 设 k 是奇数, 由古典偏微分方程理论知(2)存在解 $u_\varepsilon(x, t)$, 则有估计式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} \left[(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2 \right] dx - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (u_\varepsilon)_t^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{-x_0}^{x_0} \left[\varphi_1'^2 + (x^{2k} + \varepsilon)\varphi_2^2 \right] dx \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $x_0 > 0$ 是任意常数, $\Omega_\varepsilon^* = \Omega_\varepsilon \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t \leq t_0\}$, 而 Ω_ε 是过点 $(x_0, 0)$ 方程的特征线 l_1 :

$$\frac{dt}{dx} = -\sqrt{x^{2k} + \varepsilon}$$

过点 $(-x_0, 0)$ 方程的特征线 l_2 :

$$\frac{dt}{dx} = -\sqrt{x^{2k} + \varepsilon}$$

和直线 $t=0$ 所围成的闭区域, $x_1 > 0$ 则是 $t=t_0$ (t_0 不大于 l_1 和 t 轴交点的 t 的坐标) 和 Ω_ε 的边界 l_1 交点的 x 坐标(图 1)。

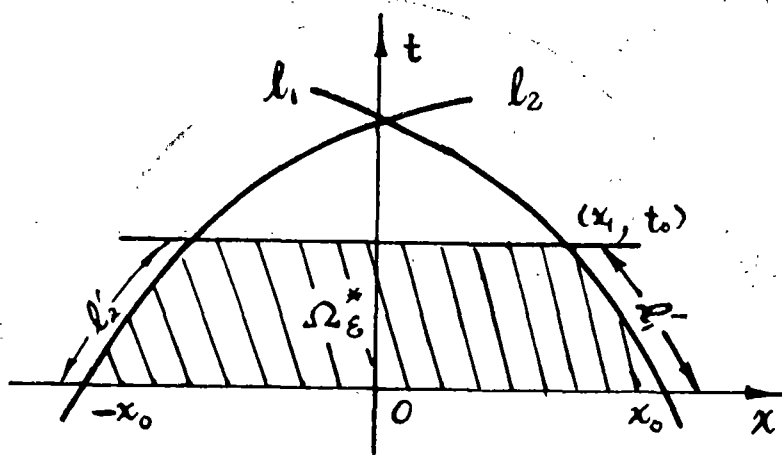


图 1

证明 把 $u_\varepsilon(x, t)$ 代入(2)的第一个方程, 并用 $(u_\varepsilon)_t$ 乘其两端, 得

$$(u_\varepsilon)_t [(u_\varepsilon)_{xx} - (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_{tt} + p(u_\varepsilon)_t] = 0$$

因为

$$(u_\varepsilon)_t (u_\varepsilon)_{xx} = [(u_\varepsilon)_x (u_\varepsilon)_t]_x - \frac{1}{2} [(u_\varepsilon)_x^2]_t$$

$$(u_\varepsilon)_t(u_\varepsilon)_{tt} = \frac{1}{2}[(u_\varepsilon)_t^2]_t$$

所以有

$$[(u_\varepsilon)_x(u_\varepsilon)_t]_x - \frac{1}{2}[(u_\varepsilon)_x^2]_t - (x^{2k} + \varepsilon) \frac{1}{2}[(u_\varepsilon)_t^2]_t + p(u_\varepsilon)_t^2 = 0$$

或

$$\frac{1}{2}[(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2]_t - [(u_\varepsilon)_x(u_\varepsilon)_t]_x - p(u_\varepsilon)_t^2 = 0$$

对上式两端在区域 Ω_ε^* 上积分, 得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_\varepsilon^*} \left\{ \frac{1}{2}[(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2]_t - [(u_\varepsilon)_x(u_\varepsilon)_t]_x \right\} dx dt \\ & - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (u_\varepsilon)_t^2 dx dt = 0 \end{aligned}$$

利用格林公式, 得

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_\varepsilon^*} [(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2] dx + (u_\varepsilon)_x(u_\varepsilon)_t dt \\ & - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (u_\varepsilon)_t^2 dx dt = 0 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_{-x_0}^{x_0} [\varphi_1'^2 + (x^{2k} + \varepsilon)\varphi_2'^2] dx + \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} [(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2] dx \\ & + \int_{l_1' + l_2'} \left\{ \frac{1}{2}[(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2] \cos(n, t) \right. \\ & \left. - (u_\varepsilon)_x(u_\varepsilon)_t \cos(n, x) \right\} dl - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (u_\varepsilon)_t^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\partial \Omega_\varepsilon^*$ 是区域 Ω_ε^* 的边界, l_1' , l_2' 是特征线 l_1 , l_2 的一部分(见图1)。因为在 l_1' 和 l_2' 上, $\cos(n, t) \neq 0$, 故

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2] \cos(n, t) - (u_\varepsilon)_x(u_\varepsilon)_t \cos(n, x) \\ & = \frac{1}{2 \cos(n, t)} \left\{ [(u_\varepsilon)_x \cos(n, t) - (u_\varepsilon)_t \cos(n, x)]^2 - (u_\varepsilon)_t^2 \cos^2(n, x) \right. \\ & \quad \left. + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2 \cos^2(n, t) \right\} \\ & = \frac{1}{2 \cos(n, t)} \left\{ [(u_\varepsilon)_x \cos(n, t) - (u_\varepsilon)_t \cos(n, x)]^2 - (u_\varepsilon)_t^2 [\cos^2(n, x) \right. \\ & \quad \left. - (x^{2k} + \varepsilon) \cos^2(n, t)] \right\} \end{aligned}$$

又因为沿特征线 l_1' 和 l_2' , 有 $\cos(n, t) > 0$,

$$\cos^2(n, x) - (x^{2k} + \varepsilon) \cos^2(n, t) = 0$$

所以

$$\int_{l_1' + l_2'} \left\{ \frac{1}{2} [(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2] \cos(n, t) - (u_\varepsilon)_x (u_\varepsilon)_t \cos(n, x) \right\} dl \geq 0 \quad (5)$$

把(4)式和(5)式结合起来, 就得到(3)式。从而引理得证。

定理 1 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^\infty(R)$, 并且 $x=0$ 是其无穷阶零点, 又 $p < 0$, k 为奇数, 则问题(1)存在唯一的解 $u(x, t) \in C^\infty(R_+^2)$, 其中

$$R_+^2 = \{(x, t) \in R^2 | t \geq 0\}$$

证明 令 $\Omega = \{(x, t) \in R^2 | 0 \leq t \leq (x_0^{k+1} - x^{k+1})/k + 1\}$, 则有 $\Omega \subset \Omega_\infty$ 。设 m 是一个任意的非负整数, $f \in C^m(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \text{令 } \|f\| &= \left(\iint_{\Omega} |f|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ \|f\|_m &= \left\{ \sum_{0 \leq i+j \leq m} \left\| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial t^j} \right\|^2 \right\}^{1/2} \\ S &= \{f \in C^m(\Omega), \|f\| < +\infty\} \end{aligned}$$

$H^m(\Omega)$ 表示 S 关于范数 $\|\cdot\|_m$ 的完备化。显然 $H^m(\Omega)$ 是一个希尔伯特空间。

由估计(3)式知,

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C_1 \quad (6)$$

其中 C_1 是与 ε 无关的常数。事实上, 因为

$$\|u_\varepsilon\|_1^2 = \|u_\varepsilon\|^2 + \|(u_\varepsilon)_t\|^2 + \|(u_\varepsilon)_x\|^2$$

由(3)式易见有($p < 0$)

$$\|(u_\varepsilon)_t\|^2, \|(u_\varepsilon)_x\|^2 \leq C^* \quad (7)$$

其中 C^* 是和 ε 无关的常数。

另一方面, 设

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(t) &= \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} u_\varepsilon^2 d\xi, \quad x_1(t) \geq 0, \text{ 则} \\ \frac{dE_\varepsilon(t)}{dt} &= \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} 2u_\varepsilon(u_\varepsilon)_t d\xi + u_\varepsilon^2[x_1(t), t]x_1'(t) + u_\varepsilon^2[-x_1(t), t]x_1'(t) \\ &= \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} 2u_\varepsilon(u_\varepsilon)_t d\xi + \{u_\varepsilon^2[x_1(t), t] + u_\varepsilon^2[-x_1(t), t]\}x_1'(t) \end{aligned}$$

因为 $x_1'(t) < 0$, 故有

$$\frac{dE_o(t)}{dt} \leq \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} u_e^2 d\xi + \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} (u_e)_t^2 d\xi$$

或

$$\frac{dE_o(t)}{dt} \leq E_o(t) + \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} (u_e)_t^2 d\xi$$

上式两端同乘 e^{-t} , 得

$$\frac{d}{dt} (e^{-t} E_o(t)) \leq e^{-t} \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} (u_e)_t^2 d\xi$$

于是

$$\begin{aligned} e^{-t} E_o(t) &\leq E_o(0) + \int_0^t e^{-\tau} \int_{-x_1(\tau)}^{x_1(\tau)} (u_e)_t^2 d\xi d\tau \\ &\leq E_o(0) + \int_0^T \int_{-x_1(\tau)}^{x_1(\tau)} (u_e)_t^2 d\xi d\tau \end{aligned}$$

从而由(7)式得

$$E_o(t) \leq e^t [E_o(0) + C^*]$$

上式两端从 0 到 T 对 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-x_1(t)}^{x_1(t)} u_e^2 dx dt &\leq [E_o(0) + C^*] (e^T - 1) \\ &= \left(\int_{-x_0}^{x_0} \varphi_1^2 dx + C^* \right) (e^T - 1) = C^{**} \end{aligned}$$

所以

$$\|u_e\|^2 \leq C^{**} \quad (8)$$

其中 C^{**} 是与 ε 无关的常数。把(7), (8)结合起来, 就得到估计式(6)。

我们再注意到, $u_e(x, t)$ 对 t 的各阶微商满足同一个方程和类似的初始数据, 其中后者是 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 和它们的微商的适当组合。例如, $(u_e)_t$ 就满足

$$\begin{cases} u_{xx} - (x^{2k} + \varepsilon) u_{tt} + p u_t = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi_2(x) \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{x^{2k} + \varepsilon} [\varphi_1''(x) + p \varphi_2(x)] \end{cases}$$

于是 $u_e(x, t)$ 对 t 的各阶微商也有类似于(3)的估计式。由假设 $x=0$ 是 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 的无穷阶零点, 故可知这些初始数据的绝对值均有与 ε 无关的上界。因而对任意的非负整数 m, 我们类似地有

$$\|u_e\|_m \leq C_m \quad (9)$$

其中 C_m 是与 ε 无关的常数。

任取趋于零的序列 $\{\varepsilon_k\}$, 相应地有 $\{u_{\varepsilon_k}\}$, 根据 Banach—Saks 引理, 存在 $\{u_{\varepsilon_k}\}$ 的一个

子序列, 我们仍记它为 $\{u_{ek}\}$ 和 $u \in H^m(\Omega)$, 使得

$$\left\| \frac{u_{e1} + \dots + u_{ek}}{k} - u \right\|_m \rightarrow 0, \text{ 当 } k \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (10)$$

令

$$u_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k u_{ej}, \text{ 则 } \{u_k\} \subset H^m(\Omega) \cap S, \text{ 并且}$$

$$\|u_k\|_m = \left\| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k u_{ej} \right\| \leq C_m$$

其中 C_m 是与 k 无关的常数。

另一方面, 因为 $u \in H^m(\Omega)$, 显然 $u \in L^2(\Omega)$, 而且由 (10) 知

$$\|u_k - u\| \rightarrow 0, \text{ 当 } k \rightarrow \infty \text{ 时}$$

从而由 Sobolev 引理知, 只要 $m-1 > \frac{1}{2}$ 就有 $u(x, t) \in C^1(\Omega)$, 又由 m 的任意性, 知 $u(x, t) \in C^\infty(\Omega)$ 。因为 $u_{e1}, \dots, u_{ek}$ 是 Cauchy 问题 (2) 在 Ω 上的解, 所以 $u_k(x, t)$ 也是 (2) 在 Ω 上的解。从而知极限函数 $u(x, t) \in C^\infty(\Omega)$ 是问题 (1) 在 Ω 上的解。又由估计式 (8) 知它是唯一的。最后再根据 $x_0 > 0$ 的任意性, 知定理 1 的结论成立。

三、关于混合问题

下面讨论混合问题:

$$\begin{cases} u_{xx} - x^{2k}u_{tt} + pu_t = 0 & (t > 0, x > 0) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \\ u(0, t) = \mu(t) \end{cases} \quad (11)$$

为此, 我们考虑两个特殊的混合问题:

$$\begin{cases} u_{xx} - x^{2k}u_{tt} + pu_t = 0 & (t > 0, x > 0) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

和

$$\begin{cases} u_{xx} - x^{2k}u_{tt} + pu_t = 0 & (t > 0, x > 0) \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \mu(t) \end{cases} \quad (13)$$

为了叙述方便, 设下面我们所讨论的数据 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\mu(t)$ 和解 $u(x, t)$ 都是 C^∞ 的, 假定函数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 及 $\mu(t)$ 都以原点为无穷阶零点。

定理 2 设 $p < 0$, k 是奇数, $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^\infty(R_+)$, 并在 $x = 0$ 有无穷阶零点, 则问题 (12) 有唯一解 $u(x, t) \in C^\infty(R_+^2)$, 其中 $R_+ = \{x \in R | x \geq 0\}$, $R_+^2 = \{(x, t) \in R^2 | x \geq 0, t \geq 0\}$ 。

证明 对任意的 $\varepsilon > 0$, 设 $u_\varepsilon(x, t)$ 是严格双曲方程混合问题:

$$\begin{cases} u_{xx} - (x^{2k} + \varepsilon)u_{tt} + pu_t = 0 & (t > 0, x > 0) \\ u(0, x) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad (12)'$$

的解。利用能量积分法, 容易得到估计式(推导过程与引理的证明类似):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_1} [(u_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(u_\varepsilon)_t^2] dx - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (u_\varepsilon)_t^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{x_0} [\varphi_1'^2 + (x^{2k} + \varepsilon)\varphi_2^2] dx \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $x_0 > 0$ 是任意常数, $\Omega_\varepsilon^* = \Omega_\varepsilon \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t \leq t_0\}$, 而 Ω_ε 是由特征线 l :

$$\begin{cases} \frac{dt}{dx} = -\sqrt{x^{2k} + \varepsilon} \\ t(x_0) = 0 \end{cases}$$

直线 $t=0$ 和 $x=0$ 围成的闭区域, $x_1 \geq 0$ 是 $t=t_0 > 0$ 与 Ω_ε 的边界交点的 x 坐标(图 2)。

令 $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, 0 \leq t \leq (x_0^{k+1} - x^{k+1})/k + 1\}$, 则 $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$ 。于是, 由估计式(14), 我们有

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C_1$$

其中 C_1 是与 ε 无关的常数。

注意到 $u_\varepsilon(x, t)$ 关于 t 的各阶微商满足同一方程和类似的初始数据, 其中后者是 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 和它们的微商的适当组合, 在 $x=0$ 有无穷阶零点。这些初始数据有与 ε 无关的上界。因而对任意的整数 m , 我们类似地有

$$\|u_\varepsilon\|_m \leq C_m$$

其中 C_m 是与 ε 无关的常数。由此, 我

们应用标准的程序, 存在 $\{u_\varepsilon\}$ 的收敛子序列 $\{u_{\varepsilon_i}\}$, 它的极限函数 $u(x, t) \in C^\infty(\Omega)$ 是问题(12)在 Ω 上的解。再由 $x_0 > 0$ 的任意性, 得 $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$, 由估计式(14)可见解是唯一的。定理 2 证毕。

定理 3 设 $p < 0$, k 是奇数, $\mu(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 在 $t=0$ 有无穷阶零点, 则问题(13)有唯一解 $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ 。

证明 令 $v(x, t) = u(x, t) - \mu(t)$, 则函数 $v(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{xx} - x^{2k}v_{tt} + pv_t = F_p(x, t) & (t > 0, x > 0) \\ v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0 \\ v(0, t) = 0 \end{cases} \quad (13)'$$

其中 $F_p(x, t) = x^{2k}\mu''(t) - p\mu'(t)$ 。

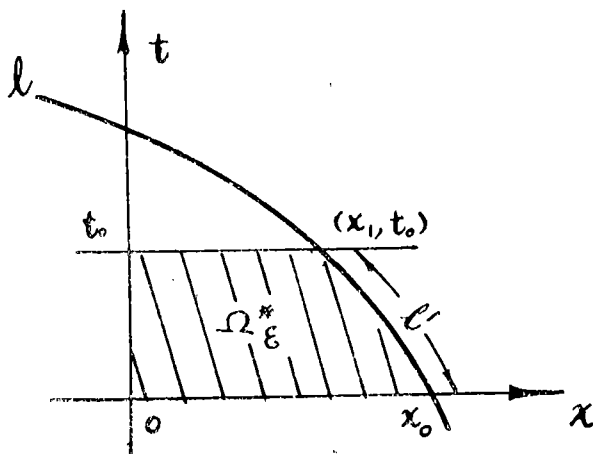


图 2

令 $\varepsilon > 0$ 是任意实数, $v_\varepsilon(x, t)$ 是以下严格双曲方程混合问题:

$$\begin{cases} v_{xx} - (x^{2k} + \varepsilon)v_{tt} + pv_t = F_p(x, t) & (x > 0, t > 0) \\ v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0 \\ v(0, t) = 0 \end{cases}$$

的解。利用能量积分法, 容易得到以下的估计式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_1} [(v_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(v_\varepsilon)_t^2] dx - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t^2 dx dt \\ & + \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t F_p(x, t) dx dt \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\Omega_\varepsilon^* = \Omega_\varepsilon \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t \leq t_0\}$ 。而 Ω_ε 是由特征线:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= -\sqrt{x^{2k} + \varepsilon} \\ t(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

和直线 $t = 0$ 与 $x = 0$ 围成的闭区域, $x_0 > 0$ 是任意常数, $x_1 \geq 0$ 是 $t = t_0 \geq 0$ 与 Ω_ε 的边界交点的 x 坐标(图 2)。

由(15)式, 显然有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_1} [(v_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(v_\varepsilon)_t^2] dx - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t^2 dx dt \\ & \leq \left| \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t F_p(x, t) dx dt \right| \end{aligned} \quad (16)$$

又

$$-p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t^2 dx dt \leq \left(\iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega_\varepsilon^*} F_p^2(x, t) dx dt \right)^{1/2}$$

或

$$\left(\iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t^2 dx dt \right)^{1/2} \leq \frac{1}{|p|} \left(\iint_{\Omega_\varepsilon^*} F_p^2(x, t) dx dt \right)^{1/2} \quad (17)$$

把(16)和(17)结合起来, 我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{x_1} [(v_\varepsilon)_x^2 + (x^{2k} + \varepsilon)(v_\varepsilon)_t^2] dx - p \iint_{\Omega_\varepsilon^*} (v_\varepsilon)_t^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{|p|} \iint_{\Omega_\varepsilon^*} F_p^2(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (18)$$

令 $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 0 \leq t \leq (x_0^{k+1} - x^{k+1})/k + 1\}$, 则 $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$ 。于是, 由估计式 (18), 我们有

$$\|v_\varepsilon\|_1 \leq C_1$$

其中 C_1 是与 ε 无关的常数, 注意到 $(v_\varepsilon)_t$ 是混合问题:

$$\begin{cases} v_{xx} - (x^{2k} + \varepsilon)v_{tt} + pv_t = x^{2k}\mu'''(t) - p\mu''(t) \\ v(x, 0) = 0 \quad v_t(x, 0) = -\frac{F_p(x, 0)}{x^{2k} + \varepsilon} = 0 \\ v(0, t) = 0 \end{cases}$$

的解。于是, 我们有

$$\|v_\varepsilon\|_2 \leq C_2$$

其中 C_2 是与 ε 无关的常数。类似地对任意的整数 m , 我们有

$$\|v_\varepsilon\|_m \leq C_m$$

其中 C_m 是与 ε 无关的常数。因此 $\{v_\varepsilon(x, t)\}$ 中有一个收敛的子序列 $\{v_{\varepsilon_j}\}$, 它的极限函数 $v(x, t) \in C^*(\Omega)$ 是 Ω 上问题 (13)' 的解。由 $x_0 > 0$ 的任意性, 得到 $u(x, t) = v(x, t) + \mu(t)$ 是问题 (13) 的 $C^*(\mathbb{R}_+^2)$ 解, 根据估计式 (18) 它是唯一的。

最后, 我们利用迭加原理, 由定理 2 和定理 3 得知

定理 4 若 $p < 0$, k 是奇数, 又 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\mu(t) \in C^*(\mathbb{R}_+)$, 并且在 $x=0$ 都有无穷阶零点, 则问题 (11) 有唯一解 $u(x, t) \in C^*(\mathbb{R}_+^2)$ 。

参 考 文 献

- [1] Treves, F., Discrete phenomena in uniqueness in the cauchy problem, *proc. Amer. Math. Soc.* 46(1974), 229—233
- [2] 王光寅、麦明澈、陆柱家, 关于始值问题的离散现象。科学通报, 23 (1978), 5, 279—282
- [3] 王光寅、麦明澈、陆柱家, 关于非主型微分方程的唯一性的一点注记, 数学学报, Vol. 22, Nob.(1979), 713—718.
- [4] 王传芳, 数学年刊, 1 (1980), 3, 399—405.

The Definite Solution Problem of "A" Class Non--Principal Typical Equation

Cai Ri-zeng

Abstract

This paper deal with the proper posing of the Cauchy problem and the mixed problem in equation $u_{xx} - x^{2k}u_{tt} + pu_t = 0$, Applying the energy integral method, it has been proved that the Solution of the Cauchy problem and the mixed problem is existing and unique for $k=1,3,5,\dots$, and $p < 0$.