一九八三年 无锡轻工业学院学报
(第一期) JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY (总第二期)

关于抛物型方程 Monte Carlo 解法的平均游动步数的估计

罗新红 费荣昌

摘 要

本文在 p_0, p_1, p_2 为常数，且 $n+1 \leqslant \left[\frac{J+1}{2}\right]$ 的情况下，对抛物型方程 Monte Carlo 解法的平均游动步数的估计作了改进。

(一)

在文[1]中讨论了二阶线性抛物型方程

$$\begin{cases} u_t - a(x,t)u_{xx} - 2b(x,t)u_x + c(x,t)u = d(x,t), (x,t) \in R; \\ u(x,0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1); \\ u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t) \quad (t \geqslant 0) \end{cases}$$

的 Monte Carlo 解法，其中 $a(x,t) > 0$，R 为半无限带状区域 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$t \geqslant 0$。

在 R 上作网格 $R_{h,k}$：$x_j = jh(j = 0,1,\cdots,J+1), t_n = nk(n = 0,1,2\cdots)$。它满足

$$a - h|b| \geqslant 0, \qquad 1 - 2\lambda a - kc \geqslant 0,$$

其中 $\lambda = k/h^2$，a,b,c,d 分别表示 $a(x,t), b(x,t), c(x,t), d(x,t)$ 在点 (x_j, t_n) 的值。

用差商代替微商，把微分方程化成差分方程：

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = (1 - 2\lambda a - kc) u_j^n + \lambda(a + hb) u_{j+1}^n + \lambda(a - hb) u_{j-1}^n + kd, \\ \qquad\qquad (x_j, t_n) \in R_{h,k}; \\ u_j^0 = f(x_j) \quad (j = 0,1,\cdots,J+1); \\ u_0^n = g_0(t_n), \ n_{J+1}^n = g_1(t_n) \quad (n = 0,1,2,\cdots). \end{cases}$$

其中 $u_j^n \equiv u(x_j, t_n)$。

本文收到日期 1982 年 8 月 30 日

以 $P_0, P_{10}, P_{11}, P_{12}$ 分别表示点 (x_j, t_{n+1})，(x_j, t_n)，(x_{j+1}, t_n)，(x_{j-1}, t_n)，并记

$$p_0 = \frac{1-2\lambda a - kc}{1-kc}, \quad p_1 = \frac{\lambda(a+hb)}{1-kc}, \quad p_2 = \frac{\lambda(a-hb)}{1-kc}.$$

有

$$p_0 \geqslant 0, \quad p_1 \geqslant 0, \quad p_2 \geqslant 0, \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

为求差分方程的解 u_j^{n+1}，在[1]中设计随机游动模型如下：使一质点从 P_0 出发分别以概率 p_0, p_1, p_2 向第 n 层的三点 P_{10}, P_{11}, P_{12} 游动，到了其中某点再分别以相应于这点的概率 p_0, p_1, p_2 向第 $n-1$ 层游动，如此重复，直到游动到达边界或第 0 层为止。至于从边界上某点或从第 0 层某点Q出发游动的质点只能停留在本身。对各种游动路线可以定义随机变量 ξ 的取值，使 ξ 的数学期望等于 u_j^{n+1}。

在[1]中还推导出从点 P_0 出发每次游动的平均游动步数 w_j^{n+1} 所满足的差分方程：

$$w_j^{n+1} = p_0 w_j^n + p_1 w_{j+1}^n + p_2 w_{j-1}^n + 1, \quad (x_j, t_n) \in R_{h,k}; \tag{1}$$

$$w_j^0 = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, J); \tag{2}$$

$$w_0^n = 0, \quad w_{J+1}^n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

并获得估计式 $w_j^{n+1} \leqslant n+1$。本文在 p_0, p_1, p_2 分别恒为常数且 $n+1 \leqslant \left[\frac{J+1}{2}\right]$ 的情况下，把这个估计式改进如下：

$$w_j^{n+1} = n+1 \quad (n+1 \leqslant j \leqslant J-n), \tag{4}$$

$$w_n^{n+1} = n+1 - p_2^n, \tag{5}$$

$$w_{n-1}^{n+1} = n+1 - 2p_2^{n-1} - (n-1)p_0 p_2^{n-1}, \tag{6}$$

$$w_j^{n+1} \leqslant n+1 - (n-j+1)p_2^j - j(1-p_2)p_2^{n-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant n-2), \tag{7}$$

$$w_{J-n+1}^{n+1} = n+1 - p_1^n, \tag{8}$$

$$w_{J-n+2}^{n+1} = n+1 - 2p_1^{n-1} - (n-1)p_0 p_1^{n-1}, \tag{9}$$

$$w_j^{n+1} \leqslant n+1 - (n-J+j)p_1^{J-j+1} - (J-j+1)(1-p_1)p_1^{n-1} \quad (J-n+3 \leqslant j \leqslant J). \tag{10}$$

（二）

为证明本文的结果，需建立两个引理。

引理 1　当 $0 \leqslant p \leqslant 1$ 时，

$$(1-p)\sum_{i=0}^{k}(n-i)p^i + \sum_{i=0}^{k}p^i = n+1-(n-k)p^{k+1} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

证：当 $0 \leqslant p < 1$ 时，

$$(1-p)\sum_{i=0}^{k}(n-i)p^i+\sum_{i=0}^{k}p^i$$

$$=[n(1-p)+1]\sum_{i=0}^{k}p^i-(1-p)p\sum_{i=0}^{k}i\,p^{i-1}$$

$$=[n(1-p)+1]\frac{1-p^{k+1}}{1-p}-(1-p)p\left(\sum_{i=0}^{k}p^i\right)'$$

$$=n(1-p^{k+1})+\frac{1-p^{k+1}}{1-p}-(1-p)p\left(\frac{1-p^{k+1}}{1-p}\right)'$$

$$=n(1-p^{k+1})+\frac{1-p^{k+1}}{1-p}-p\cdot\frac{1+kp^{k+1}-(k+1)p^k}{1-p}$$

$$=n+1-(n-k)p^{k+1}.$$

当 $p=1$ 时，等式显然成立。

(4)的证明：当 $n+1\leqslant j\leqslant J-n$ 时，从点 P_0 出发的游动必到达第 0 层，(3) 不起作用，由(1)(2)易知 $W_j^{n+1}=n+1$。

(5)的证明：据(1)、(3)、(4)，有

$$w_n^{n+1}=p_0\,w_n^n+p_1\,w_{n+1}^n+p_2\,w_{n-1}^n+1=(p_0+p_1)n+p_2\,w_{n-1}^n+1$$

$$=(p_0+p_1)n+p_2(p_0w_{n-1}^{n-1}+p_1\,w_n^{n-1}+p_2\,w_{n-2}^{n-1}+1)+1$$

$$=(p_0+p_1)n+p_2[(p_0+p_1)(n-1)+p_2\,w_{n-2}^{n-1}+1]+1$$

$$=(p_0+p_1)n+(p_0+p_1)(n-1)p_2+p_2^2w_{n-2}^{n-1}+p_2+1$$

$$=\cdots\cdots=(p_0+p_1)\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)p_2{}^i+p_2{}^n\,w_0^1+\sum_{i=0}^{n-1}p_2{}^i$$

$$=(1-p_2)\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)p_2{}^i+\sum_{i=0}^{n-1}p_2{}^i.$$

由引理 1，即得

$$w_n^{n+1}=n+1-p_2{}^n.$$

(6)的证明：据(1)、(3)、(4)、(5)，有

$$w_{n-1}^{n+1}=p_0\,w_{n-1}^n+p_1\,w_n^n+p_2\,w_{n-2}^n+1$$

$$=p_0(n-p_2^{n-1})+p_1n+p_2\,w_{n-2}^n+1$$

$$=n(p_0+p_1)-p_0p_2^{n-1}+p_2\,w_{n-2}^n+1$$

$$
= n(p_0+p_1) - p_0 p_2^{n-1} + p_2[(n-1)(p_0+p_1) - p_0 p_2^{n-2} + p_2 w_{n-3}^{n-1} + 1] + 1
$$

$$
= (p_0+p_1)[n+(n-1)p_2] - 2p_0 p_2^{n-1} + p_2^2 w_{n-3}^{n-1} + p_2 + 1
$$

$$
= \cdots\cdots = (p_0+p_1)\sum_{i=0}^{n-2}(n-i)p_2{}^i - (n-1)\, p_0 p_2^{n-1} + p_2^{n-1} w_0^2 + \sum_{i=0}^{n-2} p_2{}^i
$$

$$
= (1-p_2)\sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\, p_2{}^i + \sum_{i=0}^{n-2} p_2{}^i - (n-1)p_0 p_2^{n-1},
$$

由引理 1，即得

$$
w_{n-1}^{n+1} = n+1-2\, p_2^{n-1} - (n-1)\, p_0\, p_2^{n-1}.
$$

引理 2　(i) $w_{k-1}^n \leqslant w_k^n$　$(k=2,3,\cdots,n-1)$，

(ii)　$w_k^n \leqslant w_{k-1}^n$　$(k=J-n+3, J-n+4,\cdots,J)$.

证：(i) 当 $n=3$ 时，据(5)、(6)易知

$$
w_1^3 \leqslant w_2^3.
$$

设当 $n=j$ 时，　$w_{k-1}^j \leqslant w_k^j$，$(k=2,3,\cdots,j-1)$成立，则当 $n=j+1$ 时，据(1)，对 $k=2,3,\cdots$，j，有

$$
w_{k-1}^{j+1} = p_0\, w_{k-1}^j + p_1\, w_k^j + p_2\, w_{k-2}^j + 1,
$$

$$
w_k^{j+1} = p_0\, w_k^j + p_1\, w_{k+1}^j + p_2\, w_{k-1}^j + 1,
$$

由归纳法假设

$$
w_{k-1}^j \leqslant w_k^j,\quad w_k^j \leqslant w_{k+1}^j,\quad w_{k-2}^j \leqslant w_{k-1}^j,
$$

及

$$
w_{j-1}^j \leqslant w_j^j = w_{j+1}^j,\quad w_0^j = 0 \leqslant w_1^j,
$$

得

$$
w_{k-1}^{j+1} \leqslant w_k^{j+1},
$$

从而对 $n=3,4,\cdots$，

$$
w_{k-1}^n \leqslant w_k^n \quad (k=2,3,\cdots,n-1)
$$

都成立。

同理可证(ii)。

(7)的证明：据(1)、(3)、(5)及引理 2，有

$$
\begin{aligned}
w_j^{n+1} &= p_0 w_j^n + p_1 w_{j+1}^n + p_2 w_{j-1}^n + 1 \\
&\leqslant (p_0+p_1) w_{n-1}^n + p_2 w_{j-1}^n + 1 \\
&= (p_0+p_1)(n-p_2^{n-1}) + p_2 w_{j-1}^n + 1 \\
&\leqslant (p_0+p_1)n - (p_0+p_1)p_2^{n-1} + p_2[(p_0+p_1)(n-1) - (p_0+p_1)p_2^{n-2} + p_2 w_{j-2}^{n-1} + 1] + 1 \\
&= (p_0+p_1)[n+(n-1)p_2] - 2(p_0+p_1) p_2^{n-1} + p_2^2 w_{j-2}^{n-1} + p_2 + 1 \\
&\leqslant \cdots\cdots \leqslant (p_0+p_1) \sum_{i=0}^{j-1} (n-i) p_2{}^i - j(p_0+p_1) p_2^{n-1} + p_2^j w_0^{n-j+1} + \sum_{i=0}^{j-1} p_2{}^i \\
&= (1-p_2) \sum_{i=0}^{j-1} (n-i) p_2{}^i + \sum_{i=0}^{j-1} p_2{}^i - j(1-p_2) p_2^{n-1},
\end{aligned}
$$

由引理1，即得

$$
w_j^{n+1} \leqslant n+1-(n-j+1)p_2^j - j(1-p_2) p_2^{n-1}.
$$

(8)、(9)、(10)的证明可仿(5)、(6)、(7)。

参 考 文 献

［1］费荣昌，抛物型方程的Monte Carlo解法，上海科学技术大学科技资料，2，49—52 (1979)。

The estimation about the mean steps of random walk of Monte Carlo solutions for parabolic difference equations

Luo Xin-hong Fei Rong-chang

Abstract

When p_0, p_1, p_2 = constants and $n+1 \leqslant \left[\frac{J+1}{2}\right]$, the estimation about the mean steps of random walk of Monte Carlo solutions for parabolic difference equations is improved in this paper.