一九八三年
(第四期)
无锡轻工业学院学报
JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY
(总第五期)

方阵的相似占优与非异性

曹传书

摘　要

利用方阵的对角占优性判断方阵的非异性迄今已有不少结果[1,2,3,4],本文拟从方阵的行(列)占优[即每行(列)中的占优元素位于不同列(行)]这一条件来进行讨论,先引入相似占优与相似对角占优等概念,进而给出方阵为非异的充分必要条件,并推广[1]中的一些结论。

设P为一数域, $P^{n\times n}$ 表示P上所有n阶方阵的全体;R与C分别表示实数域与复域数, $R^{n\times n}$ 与 $C^{n\times n}$ 分别表示R上与C上所有n阶方阵的全体。

定义1　设 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$, (i)如果对于某对i, j($1\leqslant i, j\leqslant n$)有

$$|a_{ij}|\geqslant\sum_{k\neq j}|a_{ik}| \tag{1}$$

则称A为(i, j)行占优阵;如果式(1)只有不等号成立,则称A为(i, j)行严格占优阵。(ii)如果对于某对i, j($1\leqslant i, j\leqslant n$)有

$$|a_{ij}|\geqslant\sum_{k\neq i}|a_{kj}| \tag{2}$$

则称A为(i, j)列占优阵;如果式(2)只有不等号成立,则称A为(i, j)列严格占优阵。

定义2　设 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为$1,2,\cdots,n$这n个数的一个排列,如果A为(k,α_k)($k=1,2,\cdots,n$)行(严格)占优阵,则称A为行(严格)占优阵;如果A为(k,α_k) ($k=1,2,\cdots,n$) 列(严格)占优阵,则称A为列(严格)占优阵。

由定义2立得下述结论:

定理1　行或列(严格)对角占优阵分别为行或列(严格)占优阵。

定义3　设 $A\in P^{n\times n}$, 如果存在非异阵 $P\in P^{n\times n}$, 使 $P^{-1}AP$ 为行(列)严格占优阵,则称A为相似占优阵。

定理2　广义行(列)对角占优阵[1]必为相似占优阵。

证　设 $A=(a_{ij})$ 为广义行(列)对角占优阵,则存在一非异正对角阵

本文收到日期 1983年9月16日

$$D=\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \quad (d_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n),$$

使得 AD(或 DA)为行(列)严格对角占优阵，即

$$AD=\begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}d_1 & a_{n2}d_2 & \cdots & a_{nn}d_n \end{pmatrix},$$

其中

$$|a_{ii}d_i| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}d_j| \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

故有

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\frac{d_j}{d_i}\right| \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$D^{-1}AD=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dfrac{d_2}{d_1} & \cdots & a_{1n}\dfrac{d_n}{d_1} \\ a_{21}\dfrac{d_1}{d_2} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\dfrac{d_n}{d_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\dfrac{d_1}{d_n} & a_{n2}\dfrac{d_2}{d_n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为行(列)严格对角占优阵，由定理 1 知，A 为相似占优阵。证毕。

引 理 设 $A\in P^{n\times n}$，则 A 为行(列)(严格)占优阵的充分必要条件是存在一个行(列)(严格)对角占优阵 B 与置换阵 Q，使得

$$A=BQ$$

证 充分性显然成立，下证必要性。

设 A 为行(列)(严格)占优阵，由定义 2 知，存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，使得 A 为 (k,α_k) 行(列)(严格)占优阵。

令 P 为 $(\alpha_k,\ k)(k=1,2,\cdots,n)$ 位置的元素是 1 其余位置的元素是另的置换阵，易见，$B=AP$ 为行(列)(严格)对角占优阵，故得

$$A=BQ$$

其中 $Q=P^{-1}$ 为置换阵。证毕。

定 理 3 设 $A\in P^{n\times n}$，则 $\det A\neq 0$ 的充分必要条件是 A 为相似占优阵。

证 充分性：设 A 为相似占优阵，则存在非异阵 D，使得 $D^{-1}AD$ 为行(列)严格占优阵由引理知，存在行(列)严格对角占优阵 B 与置换阵 Q，使得

$$D^{-1}AD=BQ$$

因此

$$\det A=\det(D^{-1}AP)=\det(BQ)=\det B\cdot\det Q$$
$$=\pm\det B\neq 0$$

必要性：设A的有理标准形为

$$F=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$$

其中 A_i 为下列 n_i 阶 Frobenius 方阵

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_{in_i}\\1&0&\cdots&0&-a_{in_i-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{in_i-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

易见

$$\det A=\prod_{i=1}^{s}(-1)^{n_i}a_{in_i}\qquad\left(\sum_{i=1}^{s}n_i=n\right)$$

因为 $\det A\neq 0$，故有

$$a_{in_i}\neq 0\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

取

$$d_{i1}>|a_{in_i-1}|,\ d_{i2}>|a_{in_i-2}|,\ \cdots$$
$$d_{in_i-1}>|a_{i1}|\qquad(i=1,2,\cdots,s)\tag{3}$$

令

$$D=\begin{pmatrix}D_1&&&\\&D_2&&\\&&\ddots&\\&&&D_s\end{pmatrix},$$

其中

$$D_i=\begin{pmatrix}d_{i1}&&&&\\&d_{i2}&&&\\&&\ddots&&\\&&&d_{in_i-1}&\\&&&&1\end{pmatrix},$$

故有

$$D^{-1}FD=\begin{pmatrix}D_1^{-1}A_1D_1&&&\\&D_2^{-1}A_2D_2&&\\&&\ddots&\\&&&D_s^{-1}A_sD_s\end{pmatrix},$$

而

$$D_i^{-1}A_iD_i=\begin{pmatrix}\frac{1}{d_{i1}}&0&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{d_{i2}}&0&\cdots&0&0\\0&0&\frac{1}{d_{i3}}&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\frac{1}{d_{in_i-1}}&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_{in}\\1&0&0&\cdots&0&-a_{in_i-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{in_i-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&-a_{i2}\\0&0&0&\cdots&1&-a_{i1}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} d_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{i2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{i3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{in_i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{a_{in_i}}{d_{i1}} \\ \frac{d_{i1}}{d_{i2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{a_{in_i-1}}{d_{i2}} \\ 0 & \frac{d_{i2}}{d_{i3}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{a_{in_i-2}}{d_{i3}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{d_{in_i-2}}{d_{in_i-1}} & 0 & -\frac{a_{i2}}{d_{in_i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{in_i-1} & -a_{i1} \end{pmatrix}$$

由式(3)知，$D_i^{-1}A_iD_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$为行严格占优阵，因此，由相似的传递性知A为一相似占优阵。证毕。

由定理 2 与定理 3 立得下述推论：

推 论 设A为行(列)广义对角占优阵，则

$$\det A \neq 0$$

定 义 4 设 $A\in P^{n\times n}$，如果存在非异阵 $P\in P^{n\times n}$，使 $P^{-1}AP$ 为行(列)严格对角占优阵，则称A为相似对角占优阵。

显然，相似对角占优阵必为相似占优阵，但逆之不真。

定 理 4 设 $A\in C^{n\times n}$，则 $\det A\neq 0$ 的充分必要条件是A为一相似对角占优阵。

证 充分性由定理 1 与定理 3 立得，下证必要性。

设A的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中 J_i 为 n_i 阶 Jordan 块

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,s;\quad \sum_{i=1}^{s} n_i=n),$$

因为 $\det A\neq 0$，故有

$$\lambda_i\neq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

取

$$d_{i2}>\frac{1}{|\lambda_i|},\ d_{i3}>\frac{d_{i2}}{|\lambda_i|},\ \cdots,\ d_{in_i}>\frac{d_{in_i-1}}{|\lambda_i|} \qquad (i=1,2,\cdots,s) \qquad (4)$$

令

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_s \end{pmatrix},$$

其中

$$D_i=\begin{pmatrix}1&&&\\&d_{i2}&&\\&&\ddots&\\&&&d_{in_i}\end{pmatrix}\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

故有

$$D^{-1}JD=\begin{pmatrix}D_1^{-1}J_1D_1&&&\\&D_2^{-1}J_2D_2&&\\&&\ddots&\\&&&D_s^{-1}J_sD_s\end{pmatrix},$$

而

$$D_i^{-1}J_iD_i=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{d_{i2}}&0&\cdots&0\\0&0&\frac{1}{d_{i3}}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\frac{1}{d_{in_i}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_i&0&0&\cdots&0&0\\1&\lambda_i&0&\cdots&0&0\\0&1&\lambda_i&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&\lambda_i\end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&d_{i2}&0&\cdots&0\\0&0&d_{i3}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&d_{in_i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_i&0&0&\cdots&0&0\\\frac{1}{d_{i2}}&\lambda_i&0&\cdots&0&0\\0&\frac{d_{i2}}{d_{i3}}&\lambda_i&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0\ \cdots&\frac{d_{in_i-1}}{d_{in_i}}&\lambda_i\end{pmatrix}$$

由式(4)知，$D_i^{-1}J_iD_i(i=1,2,\cdots,s)$为行严格对角占优阵，因此，A为一相似对角占优阵。证毕。

注　定理4对实数域R并不成立。

例如，设

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

则

$$D^{-1}AD=\frac{1}{\det D}\begin{pmatrix}ab+ed&b^2+d^2\\-a^2-c^2&-ab-cd\end{pmatrix}$$

其中　　$\det D=ad-bc\neq0$。

欲使A为一相似对角占优阵，即要使

$$|ab+cd|>b^2+d^2,\qquad|ab+cd|>a^2+c^2,$$

所以

$$2|ab+cd|>a^2+b^2+c^2+d^2$$

但上述不等式不可能成立，因为显然有

$$a^2+b^2\geqslant 2|ab|, \quad c^2+d^2\geqslant 2|cd|,$$

因此恒有

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 2|ab|+2|cd|\geqslant 2|ab+cd|$$

上述例子说明，当 $A\in R^{2\times 2}$ 时，A不可能为一相似对角占优阵；但此时，A的特征值为 $\pm i$，故A与方阵$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$相似，而后者显然为 $C^{2\times 2}$ 中的行严格对角占优阵，即A为一相似对角占优阵，因此，方阵A是否与对角占优阵相似是同A的基域密切相关。

主 要 参 考 文 献

[1] 高益明，矩阵广义对角占优和非奇的判定，东北师大学报，1982 年第三期。

[2] D. E. Bailey and D. E. Crabtree, Lin. Alg. Appl. 2(1969).

[3] P. N. Shivakumar and K. H. Chew, A sufficient condition of determinant no zero, Proc. Amer. Math. Soc. 41. 1(1974).

[4] 屠伯埙，矩阵秩的下界与方阵的非异性(I)，复旦学报，1982.12.第四期。

Similar Diagonal Dominance and Nonsignlarity of Matrices (I)

Cao Chuan-shu

Abstract

In this puper, We first give a definition for similar dominance and similar diagonal dominance of a matrix. We give two necessary and sufficient conditions for a determinant to be no zero, the main results are as follows:

Theorem 1. Let $A=(a_{ij})$ be $n\times n$ matrix, where a_{ij} belongs to P (unmber field), then necessary and sufficient condition for a determinant of matrix A to be no zero is that matrix A is similar dominance.

Theorem 2. Let $A=(a_{ij})$ be $n\times n$ matrix, where a_{ij} are complex numbers, then necessary and suffieient condition for a Leterminant of matrix A to be no zer is that matrix A is similar diagonal dominant.