

九点格式椭圆型差分方程的 Monte Carlo 解法

张建华 费荣昌

(基础课部)

应用 Monte Carlo 方法求解二维椭圆型偏微分方程，一般都是将微分方程化为五点(菱形)格式差分方程，然后求解。文[1]中比较详细地论述了各类五点格式椭圆型差分方程的 Monte Carlo 解法。为了缩小差分方程的截断误差，减少平均游动步数，本文给出了九点格式椭圆型差分方程的第一、第二和第三边值问题的 Monte Carlo 解法及平均游动步数的估计。

一、Laplace 方程第一边值问题

1. 九点差分格式的 Monte Carlo 解法

欲求 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(P) = 0, P \in D, & (1.1) \\ u(Q) = f(Q), Q \in \Gamma & (1.2) \end{cases}$$

的解。其中D是某二维区域， Γ 是D的边界。

以步长为h的正方形网格覆盖区域D，在接近边界 Γ 处，取与边界相距最近的点，如图1，将它们连成多边形区域，记 D^* 为其内部节点的全体， Γ^* 为其边界节点的全体。

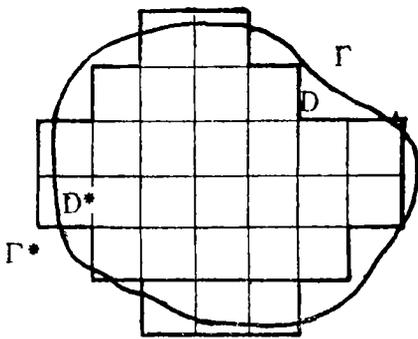


图 1

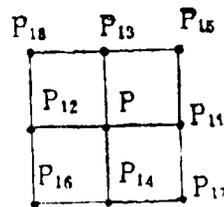


图 2

与方程(1.1)相应的九点格式^[2]差分方程为

$$u(P) = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^4 u(P_{1j}) + \frac{1}{20} \sum_{j=5}^8 u(P_{1j}), \quad P \in D^* \quad (1.3)$$

其中 $P_{1j}(j=1,2,\dots,8)$ 是与 P 相邻的八个节点(图2)。

边界条件(1.2)化为

$$u(Q) = f(Q), \quad Q \in \Gamma^* \quad (1.4)$$

构造二维随机游动如下:

设想有一质点自 P 出发, 分别按概率

$$p, p, p, p, \frac{1}{4} - p, \frac{1}{4} - p, \frac{1}{4} - p, \frac{1}{4} - p \quad (1.5)$$

(这里 p 是 $0 < p < \frac{1}{4}$ 的任意实数)向与 P 相邻的八个节点 $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18}$ 之一游动一步, 然后再分别按概率(1.5)自新的位置向与之相邻的东、西、北、南、东北、西南、东南、西北八个邻点之一游动一步。如此继续下去, 直到质点到达某边界节点 Q 处, 游动才终止(图3)。

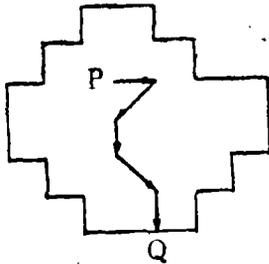


图3

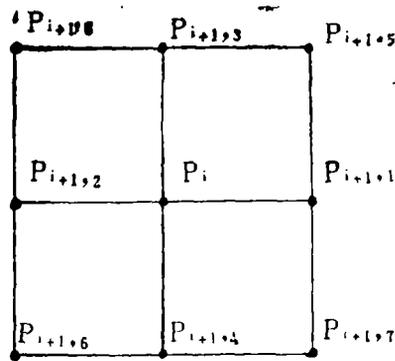


图4

对节点 $P_i \in D^*$, 若质点从 P_i 一步游动到 $P_{i+1,j}(j=1,2,3,4)$, 则这一步称为一个移动; 若质点从 P_i 一步游动到 $P_{i+1,j}(j=5,6,7,8)$, 则这一步称为一个跳动。记 $\mu_k = \mu(\gamma_p)$ 为游动路线 $\gamma_p: P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_k$ 的跳动次数。

若质点的游动路线是

$$\gamma_p: P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_k = Q \in \Gamma^*,$$

则定义随机变量 ξ 的值为

$$\xi = v(\gamma_p) = \frac{1}{5^k p^k - \mu^k (1-4p)^{\mu^k}} \cdot f(Q). \quad (1.6)$$

若质点游动的出发点是某边界节点 Q , 则它就停留在 Q 处, 这时定义随机变量 ξ 的值为

$$\xi = v(\gamma_Q) = f(Q). \quad (1.7)$$

现在, 我们来证明, 这样定义的随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 就是方程(1.3)满足边界

条件(1.4)的解, 即

$$E(\xi) = E(v(\gamma_p)) = u(P).$$

证明 对 $P \in D^*$, 以 $P_r\{\gamma_p\}$ 表示质点沿路线 γ_p 游动的概率, 按数学期望的定义, 有

$$E(v(\gamma_p)) = \sum_{\{\gamma_p\}} v(\gamma_p) P_r\{\gamma_p\},$$

上式右端为对从 P 点出发的一切游动路线的集合 $\{\gamma_p\}$ 求和.

将 γ_p 看成是由 $P_0 \rightarrow P_{1j}$ 和

$$\gamma_{p1j}: P_{1j} \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_k = Q \in \Gamma^*$$

组成, 则由

$$\mu_k = \mu(\gamma_p) = \begin{cases} \mu(\gamma_{p1j}), & j = 1, 2, 3, 4, \\ 1 + \mu(\gamma_{p1j}), & j = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

及(1.6)知

$$v(\gamma_p) = \begin{cases} \frac{1}{5p} v(\gamma_{p1j}), & j = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{5(1-4p)} v(\gamma_{p1j}), & j = 5, 6, 7, 8. \end{cases}$$

又

$$P_r\{P \rightarrow P_{1j}\} = \begin{cases} p, & j = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{1}{4} - p, & j = 5, 6, 7, 8. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} E(v(\gamma_p)) &= \sum_{\{\gamma_p\}} v(\gamma_p) P_r\{\gamma_p\} \\ &= \sum_{j=1}^4 \sum_{\{\gamma_{p1j}\}} \frac{1}{5p} v(\gamma_{p1j}) P_r\{P \rightarrow P_{1j}\} P_r\{\gamma_{p1j}\} \\ &\quad + \sum_{j=5}^8 \sum_{\{\gamma_{p1j}\}} \frac{1}{5(1-4p)} v(\gamma_{p1j}) P_r\{P \rightarrow P_{1j}\} P_r\{\gamma_{p1j}\} \\ &= \frac{1}{5} \sum_{j=1}^4 E(v(\gamma_{p1j})) + \frac{1}{20} \sum_{j=5}^8 E(v(\gamma_{p1j})), \end{aligned}$$

即 $E(v(\gamma_p))$ 满足方程(1.3).

对 $Q \in \Gamma^*$, 有

$$E(v(\gamma_Q)) = \sum_{\{\gamma_Q\}} v(\gamma_Q) P_r\{\gamma_Q\},$$

γ_Q 表示质点自边界节点 Q 出发而终止于 Γ^* 上的游动路线, 这样的游动路线只有一条, 就是质点从一开始就停留在点 Q 处, 因此 $P_r\{\gamma_Q\} = 1$, 从而

$$E(v(\gamma_Q)) = \sum_{\{\gamma_Q\}} v(\gamma_Q) P_r\{\gamma_Q\} = v(\gamma_Q) = f(Q),$$

即 $E(v(\gamma_Q))$ 满足边界条件 (1.4).

因此, $E(\xi)$ 就是方程 (1.3) 满足边界条件 (1.4) 的解.

2. 平均游动步数的估计

下面对上述的 Laplace 方程九点差分格式第一边值问题的 Monte Carlo 解法的平均游动步数进行估计, 并与五点格式解法的平均游动步数进行比较.

设 $v_v(P)$ 表示质点从 P 点出发游动经 v 步终止于边界 Γ^* 上的概率, 则平均游动步数为

$$Z(P) = E(v(P)) = \sum_{v=1}^{\infty} v v_v(P). \quad (1.8)$$

以

$$v_v(P) = p \sum_{i=1}^4 v_{v-1}(P_{1i}) + \left(\frac{1}{4} - p\right) \sum_{i=5}^8 v_{v-1}(P_{1i})$$

代入 (1.8), 并注意到

$$\sum_{v=1}^{\infty} v_{v-1}(P_{1i}) = 1,$$

得

$$\begin{aligned} Z(P) &= \sum_{v=1}^{\infty} v \left[p \sum_{i=1}^4 v_{v-1}(P_{1i}) + \left(\frac{1}{4} - p\right) \sum_{i=5}^8 v_{v-1}(P_{1i}) \right] \\ &= p \sum_{i=1}^4 \left[\sum_{v=1}^{\infty} (v-1) v_{v-1}(P_{1i}) + \sum_{v=1}^{\infty} v_{v-1}(P_{1i}) \right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} - p\right) \sum_{i=5}^8 \left[\sum_{v=1}^{\infty} (v-1) v_{v-1}(P_{1i}) + \sum_{v=1}^{\infty} v_{v-1}(P_{1i}) \right] \\ &= p \sum_{i=1}^4 Z(P_{1i}) + \left(\frac{1}{4} - p\right) \sum_{i=5}^8 Z(P_{1i}) + 1. \end{aligned}$$

对 $Q \in \Gamma^*$, 显然有

$$Z(Q) = 0.$$

于是, 问题归结为估计

$$\begin{cases} 1Z(P) = -1, & P \in D^*, \\ Z(Q) = 0, & Q \in \Gamma^* \end{cases} \quad (1.9)$$

$$(1.10)$$

的解. 其中

$$1Z(P) = p \sum_{i=1}^4 Z(P_{1i}) + \left(\frac{1}{4} - p\right) \sum_{i=5}^8 Z(P_{1i}) - Z(P). \quad (1.11)$$

为此, 我们引进一个引理.

引理 若

$$\begin{cases} 1 - W(P) \leq -|Z(P)| = -1, & P \in D^*, \\ W(Q) \geq |Z(Q)| = 0, & Q \in \Gamma^*, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\quad (1.13)$$

则

$$|Z(P)| \leq W(P). \quad \textcircled{1}$$

现在利用这个引理来估计 $Z(P)$. 设

$$W(P) = W(x, y) = \lambda \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right], \quad (1.14)$$

其中, a, b 为把区域 D^* 全部包含在其内部的椭圆

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

的两个半轴之长, (x_0, y_0) 为椭圆的中心.

显然有 $W(Q) \geq 0$, 即满足引理条件(1.13).

根据 (1.11)(1.14), 可得

$$1 - W(P) = -(1-2p)\lambda h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right),$$

要使 $W(P)$ 满足条件(1.12), 只须取

$$\lambda \geq 1 / \left[(1-2p)h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right].$$

因此

$$\begin{aligned} |Z(P)| &\leq W(P) = \lambda \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right] \\ &= \frac{1}{(1-2p)h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right]. \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

即得平均游动步数的估计式

$$Z(P) \leq \frac{1}{(1-2p)h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right]. \quad (1.15)$$

较为粗略的估计式为

$$Z(P) \leq \frac{1}{2(1-2p)h^2} r^2, \quad (1.16)$$

其中 $r = \max(a, b)$.

对于 Laplace 方程第一边值问题五点差分格式的 Monte Carlo 解法^[3], 平均游动步数的估计式为^[4,5]

$$Z(P) \leq \frac{2}{h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right],$$

或

$$Z(P) \leq \frac{1}{h^2} r^2.$$

由此, 我们看到, Laplace 方程第一边值问题九点差分格式的 Monte Carlo 解法的平均游动步数的估计值是五点差分格式解法的 $1/2(1-2p)$ ($0 < p < 1/4$), 当 $p = 1/4$ 时, $5^k p^k (1-4p)^k = 1$, 这时随机变量 ξ 的取值比较简单 ($\xi = f(Q)$), 九点差分格式解法的平均游动步数约为五点差分格式解法的 $5/6$. 当 p 取值很小时, 九点差分格式解法的平均游动步数接近于五点差分格式解法的一半, 这是九点差分格式解法较五点差分格式解法的一个优点. 其另一个优点是, Laplace 方程九点差分格式的截断误差为 $O(h^6)$, 比五点差分格式的截断误差 $O(h^2)$ 要小得多.

例 求下述第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1, \\ u(x, y) = x^3 - 3xy^2, & (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

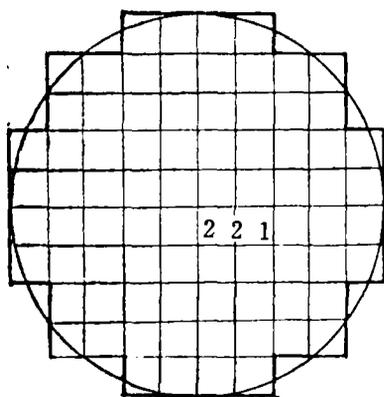


图 5

的解 $u(x, y)$ 在点 $(2.2, 1)$ 处的值 (真值为 $u(2.2, 1) = 4.048$).

取步长 $h = 0.2$ 的正方形网格覆盖区域 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1$, 在接近边界 $\Gamma: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 处, 取与边界 Γ 距离最近的点, 连成一个多边形区域 (图 5).

分别用五点差分格式解法和九点差分格式解法计算得^③

组号	计算次数	五点差分格式解法				九点差分格式解法			
		平均游动步数		$u(2.2, 1)$ 的值		平均游动步数		$u(2.2, 1)$ 的值	
		估计值	计算值	平均值	误差(%)	估计值	计算值	平均值	误差(%)
1	1000		21.012	4.1810	3.286		17.800	4.1311	2.053
2	1000	≤ 24	23.581	4.4646	10.291	≤ 20	20.243	4.5370	12.080
3	1000		23.566	4.2590	5.212		20.460	4.2305	4.508
4	1000		22.156	4.7854	18.216		19.575	3.7058	8.454
合计	4000		≤ 24	22.579	4.4225		9.251	≤ 20	19.520

二、一般椭圆型方程第一边值问题

对于一般的椭圆型方程, 经过适当的变换可化成(见[6]第四章 § 1)

$$Lu(P) \equiv \Delta u(P) + c(P) \frac{\partial u}{\partial x} + d(P) \frac{\partial u}{\partial y} + g(P)u(P) = s(P), P \in D, \quad (2.1)$$

其中, $c(P), d(P), g(P), s(P)$ 为 $D + \Gamma$ 上的连续函数, $g(P) \leq 0$, Γ 是 D 的边界.

设边界条件为

$$u(Q) = f(Q), Q \in \Gamma. \quad (2.2)$$

定义差分算子 l 为

$$lu \equiv \frac{2}{3} \left\{ \frac{u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} - 4u}{h^2} + c \frac{u_{11} - u_{13}}{2h} + d \frac{u_{13} - u_{14}}{2h} + gu \right\} \\ + \frac{1}{3} \left\{ \frac{u_{15} + u_{16} + u_{17} + u_{18} - 4u}{h^2} + c \frac{u_{15} - u_{16} + u_{17} - u_{18}}{4h} + d \frac{u_{15} - u_{16} - u_{17} + u_{18}}{4h} \right\},$$

其中, $u = u(P), c = c(P), d = d(P), g = g(P), u_{1j} = u(P_{1j}), j = 1, 2, \dots, 8$.

用差分算子 l 代替微分算子 L , 将(2.1)化为

$$u = \left(1 - \frac{3}{10} h^2 g\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{h}{10} c\right) u_{11} + \left(\frac{1}{5} - \frac{h}{10} c\right) u_{12} + \left(\frac{1}{5} + \frac{h}{10} d\right) u_{13} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{5} - \frac{h}{10} d\right) u_{14} + \left(\frac{1}{20} + \frac{h}{40} (c+d)\right) u_{15} + \left(\frac{1}{20} - \frac{h}{40} (c+d)\right) u_{16} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{20} + \frac{h}{40} (c-d)\right) u_{17} + \left(\frac{1}{20} - \frac{h}{40} (c-d)\right) u_{18} \right] - \frac{3}{10} h^2 \left(1 - \frac{3}{10} h^2 g\right)^{-1} s, \\ P \in D^*. \quad (2.3)$$

边界条件(2.2)化为

$$u(Q) = f(Q), Q \in \Gamma^*. \quad (2.4)$$

此外, 假设 h 满足

$$|c(P)| \leq \frac{2}{h}, |d(P)| \leq \frac{2}{h}, |c(P) + d(P)| \leq \frac{2}{h}, |c(P) - d(P)| \leq \frac{2}{h},$$

为此, 只需令

$$h \leq \frac{2}{\max_{P \in D} \{|c(P)| + |d(P)|\}}.$$

构造二维随机游动与 Laplace 方程第一边值问题解法中的相似, 不同者仅为当质点在 $P_i \in D^*$ 时, 分别以概率

$$p \left(1 + \frac{h}{2} c_i\right), p \left(1 - \frac{h}{2} c_i\right), p \left(1 + \frac{h}{2} d_i\right), p \left(1 - \frac{h}{2} d_i\right), \\ \left(\frac{1}{4} - p\right) \left(1 + \frac{h}{2} (c_i + d_i)\right), \left(\frac{1}{4} - p\right) \left(1 - \frac{h}{2} (c_i + d_i)\right), \\ \left(\frac{1}{4} - p\right) \left(1 + \frac{h}{2} (c_i - d_i)\right), \left(\frac{1}{4} - p\right) \left(1 - \frac{h}{2} (c_i - d_i)\right) \quad (2.5)$$

向与 P_i 相邻的八个节点 $P_{i+1,1}, P_{i+1,2}, P_{i+1,3}, P_{i+1,4}, P_{i+1,5}, P_{i+1,6}, P_{i+1,7}, P_{i+1,8}$ 之一游动一步。其中 $c_i = c(P_i)$, $d_i = d(P_i)$ 。

为表达方便起见, 令

$$\alpha_m = \frac{1}{5^m p^{m-\mu_m} (1-4p)^{\mu_m}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$W_i = \left(1 - \frac{3}{10} h^2 g(P_i)\right)^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

若质点的游动路线是

$$\gamma_p: P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_k = Q \in \Gamma^*,$$

则定义随机变量 ξ 的值为

$$\xi = u(\gamma_p) = -\frac{3}{10} h^2 \sum_{m=0}^{k-1} (\alpha_m \prod_{i=1}^m w_i) s(p_m) + \alpha_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} w_i\right) f(Q). \quad (2.6)$$

若质点游动的出发点是某边界节点 Q , 则它就停留在 Q 处, 这时定义随机变量 ξ 的值为

$$\xi = u(\gamma_Q) = f(Q). \quad (2.7)$$

可以证明, 这样定义的随机变量 ξ , 其数学期望 $E(\xi)$ 就是方程 (2.3) 满足边界条件 (2.4) 的解, 即

$$E(\xi) = E(u(\gamma_p)) = u(P).$$

对上述给出的 Monte Carlo 解法, 其平均游动步数 $Z(P)$ 满足的差分方程为

$$\begin{cases} 1 Z(P) = -1, & P \in D^*, \\ Z(Q) = 0, & Q \in \Gamma^*, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } 1 Z(P) = & p \left[\left(1 + \frac{h}{2} c\right) Z_{11} + \left(1 - \frac{h}{2} c\right) Z_{12} + \left(1 + \frac{h}{2} d\right) Z_{13} + \left(1 - \frac{h}{2} d\right) Z_{14} \right] \\ & + \left(\frac{1}{4} - p\right) \left[\left(1 + \frac{h}{2}(c+d)\right) Z_{15} + \left(1 - \frac{h}{2}(c+d)\right) Z_{16} \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{h}{2}(c-d)\right) Z_{17} + \left(1 - \frac{h}{2}(c-d)\right) Z_{18} \right] - Z, \end{aligned}$$

$$Z = Z(P), \quad Z_{1j} = Z(P_{1j}), \quad j = 1, 2, \dots, 8, \quad c = c(P), \quad d = d(P).$$

用与第一节 2 相同的方法对 $Z(P)$ 进行估计, 得平均游动步数的估计式:

$$Z(P) \leq \frac{1}{(1-2p)h^2 \min\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{|c|}{a} - \frac{|d|}{b}\right)} \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right]. \quad (2.8)$$

而相应的五点格式差分方程第一边值问题的 Monte Carlo 解法^[1]的平均游动步数的估计式为^[5]

$$Z(P) \leq \frac{2}{h^2 \min\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{|c|}{a} - \frac{|d|}{b}\right)} \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right].$$

因此, 九点差分格式解法的平均游动步数的估计值为五点差分格式解法的 $1/2(1-2p)$ 。

三、第二、第三边值问题

九点格式椭圆型差分方程的第二和第三边值问题的 Monte Carlo 解法, 与五点格式的类型。我们以 Laplace 方程为例, 给出其结果。

1. 第二边值问题

Laplace 方程第二边值问题为

$$\begin{cases} \Delta u(P) = 0, & P \in D, & (3.1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f(Q), & Q \in \Gamma, & (3.2) \end{cases}$$

其中, $\partial u / \partial n$ 为内法线方向导数, D 为某边界平行于坐标轴的二维多边形区域, Γ 是 D 的边界, 以步长为 h 的正方形网格覆盖区域 D , 边值问题 (3.1)(3.2) 化为

$$u(P) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^4 u(P_{1i}) + \frac{1}{20} \sum_{i=5}^8 u(P_{1i}), \quad P \in D^*, \quad (3.3)$$

$$\frac{u(P_e) - u(Q)}{h} = f(Q), \quad Q \in \Gamma^*, \quad (3.4)$$

其中 P_e 是与 Q 相邻且位于 Q 处内法线方向上的内部节点(图 6)。

构造二维随机游动如下:

质点从 P 出发, 当它在 D^* 内部时, 分别以概率

$$p, p, p, p, \frac{1}{4} - p, \frac{1}{4} - p, \frac{1}{4} - p, \frac{1}{4} - p \quad (3.5)$$

向与其相邻的东、西、北、南、东北、西南、东南、西北八个节点之一游动一步。当质点到达边界 Γ^* 的某节点 Q (或游动的出发点就是 Q) 时, 或以概率 t 被弹回到 P_e 处继续游动, 或以概率 $1-t$ 被吸收, 即

$$\begin{cases} \Pr\{Q \rightarrow P_e\} = t, & (3.6) \\ \Pr\{Q \rightarrow Q\} = 1 - t, & (3.7) \end{cases}$$

其中 t 是 $0 < t < 1$ 的任意实数。

这样定义的随机游动, 它的每一条自 P 点出发的游动路线, 最后必将终止于边界 Γ^* 的某节点处。

定义随机变量 ξ 如下:

游动路线 ($Q \in \Gamma^*$)

随机变量 ξ 的值

$$\gamma_p: P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_k = Q, \quad \xi = v(\gamma_p) = \frac{h}{t-1} \cdot \frac{1}{5^k p^k - \mu^k (1-4p)^{\mu k}} f(Q);$$

$$\gamma_p: P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_k = Q \rightarrow P_e \rightarrow \dots, \quad \xi = v(\gamma_p) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{5^k p^k - \mu^k (1-4p)^{\mu k}} u(\gamma_{pe});$$

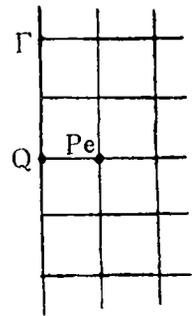


图 6

$$\gamma_Q: Q \rightarrow Q, \quad \xi = v(\gamma_Q) = \frac{h}{t-1} f(Q);$$

$$\gamma_Q: Q \rightarrow Pe \rightarrow \dots, \quad \xi = v(\gamma_Q) = \frac{1}{t} v(\gamma_{Pe}).$$

则 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 是(3.3)(3.4)的解, 即

$$E(\xi) = E(v(\gamma_p)) = u(P).$$

2. 第三边值问题

Laplace 方程第三边值问题为

$$\begin{cases} \Delta u(P) = 0, & P \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \beta u(Q) + f(Q), & Q \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $\beta > 0$ 为实数, 其他符号同第二边值问题.

以步长为 h 的正方形网格覆盖区域 D , (3.8)(3.9)化为

$$u(P) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^4 u(P_{1i}) + \frac{1}{20} \sum_{i=5}^8 u(P_{1i}), \quad P \in D^*, \quad (3.10)$$

$$\frac{u(Pe) - u(Q)}{h} = \beta u(Q) + f(Q), \quad Q \in \Gamma^*. \quad (3.11)$$

构造二维随机游动类似于第二边值问题, 不同者仅为(3.6)(3.7)应改为

$$\Pr\{Q \rightarrow Pe\} = \frac{1}{1 + h\beta},$$

$$\Pr\{Q \rightarrow Q\} = \frac{h\beta}{1 + h\beta}.$$

定义随机变量 ξ 如下:

游动路线($Q \in \Gamma^*$)

随机变量 ξ 的值

$$\gamma_p: P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_k = Q, \quad \xi = v(\gamma_p) = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{5^k p^k - \mu^k (1-4p)^{\mu k}} f(Q);$$

$$\gamma_p: P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{k-1} \rightarrow P_k = Q \rightarrow Pe \rightarrow \dots, \quad \xi = v(\gamma_p) = \frac{1}{5^k p^k - \mu^k (1-4p)^{\mu k}} v(\gamma_{Pe});$$

$$\gamma_Q: Q \rightarrow Q, \quad \xi = v(\gamma_Q) = -\frac{1}{\beta} f(Q);$$

$$\gamma_Q: Q \rightarrow Pe \rightarrow \dots, \quad \xi = v(\gamma_Q) = v(\gamma_{Pe}).$$

则 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 是(3.10)(3.11)的解, 即

$$E(\xi) = E(v(\gamma_p)) = u(P).$$

3. 平均游动步数的估计

按平均弹回次数对第二, 第三边值问题的平均游动步数进行估计.

质点自 P 点出发游动第一次到达边界的平均游动步数的估计仍然是(1.13)(或(1.14)), 以后每次弹回 D^* 内部再游动到达边界的平均游动步数的估计式为

$$Z(P_{ei}) \leq \frac{M}{(1-2p)h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)},$$

其中

$$M = \max_{\Gamma_e} \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right],$$

Γ_e 是由与 Γ^* 上的节点 Q_i 相邻的内部节点 P_{ei} 所连成的多边形区域的边界。而游动的平均弹回次数 $X(P)$ 的估计式为^[5]

第二边值问题: $X(P) \leq t / (1-t)$;

第三边值问题: $X(P) \leq 1 / (h\beta)$ 。

因此, 平均游动步数的估计式为

第二边值问题:

$$Z(P) \leq \frac{1}{(1-2p)h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left[\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right) + \frac{Mt}{1-t} \right],$$

第三边值问题:

$$Z(P) \leq \frac{1}{(1-2p)h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left[\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right) + \frac{M}{h\beta} \right].$$

较为粗略的估计式为

第二边值问题:

$$Z(P) \leq \frac{1}{2(1-2p)h^2} \cdot \frac{1}{1-t} r^2;$$

第三边值问题:

$$Z(P) \leq \frac{1}{2(1-2p)h^2} \cdot \frac{1+h\beta}{h\beta} r^2.$$

① 这个引理的证明完全类似于[2]中第七章§3定理2的证明。

② 此处取 λ 的最小值 $\lambda = \frac{1}{(1-2p)h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}$ 。

③ 此计算在DJS-131计算机上进行。

参 考 文 献

- [1] 王建华, 《椭圆型差分方程的蒙特卡罗解法》, 清华大学学报, 第9期, 第4卷 1962, 35—61。
 [2] 北京大学等编, 《计算方法》, 人民教育出版社, 1961。
 [3] H.П. 波斯连科, Ю.А. 施廖盖尔, 《统计试验法(蒙特卡罗法)》, 上海科学技术出版社 1964。
 [4] 费荣昌, 《MONTE CARLO 方法》, 上海科技大学, 1965。
 [5] 魏公毅, 《用蒙特卡罗方法求解椭圆型差分方程的平均游动步数的估计》, 清华大学毕业论文。
 [6] 复旦大学数学系主编, 《数学物理方程》, 人民教育出版社, 1979。

84022

九点格式椭圆型差分方程的 Monte Carlo 解法 《无锡轻工业学院学报》，1984年，第3卷，第3期

关键词 九点格式椭圆型差分方程，Monte Carlo 解法，平均游动步数。

摘要 本文给出了九点格式椭圆型差分方程的第一、第二和第三边值问题的 Monte Carlo 解法及平均游动步数的估计。

作者：张建华 费荣昌

84023

运用多元线性回归模型和微型计算机预测专门人才需求量 《无锡轻工业学院学报》，1984年，第3卷，第3期

关键词 人才预测，微电子计算机，数学模型。

摘要 本文运用数学回归法和微型计算机建立了一种预测专门人才的数学方法。得到了四种不同类型的数学模型。利用数学模型可预测未来（1990—2000年）对专门人才的需求量。

作者：周镇江

84024

用阳极溶出伏安法测定啤酒中铜、铅的含量 《无锡轻工业学院学报》，1984年，第3卷，第3期

关键词 啤酒，铜铅测定，阳极溶出伏安法。

摘要 本文主要介绍了阳极溶出伏安法在啤酒成分中痕量铜铅离子的分析方法，用玻璃碳电极作为工作电极，以醋酸—醋酸纳缓冲液为底液，对铜铅离子进行了本方法的条件试验，选择了理想的电解电位、电积时间、扫描速率等条件。酒样用标准加入法，所测铜铅的实验数据有较好的重现性，铜铅测定范围可达10—360 ppb，回收率在90—110%之内，变异系数 $< \pm 10\%$ 。

作者：余槐 陆军

84025

蛋白质分散指数PDI测定实践 《无锡轻工业学院学报》，1984年，第3卷，第3期

关键词 大豆，蛋白质，指数。

摘要 测定PDI在衡量大豆制品中蛋白质的变性程度及评价其质量起着重要作用，近来，我国不少单位也进行了这项测定，但缺乏统一的仪器和方法。本文介绍的是采用国产仪器进行PDI测定的一种方法，此法较接近A.O.C.S.规定，测得数据重复性较好，可使测定PDI成为一般油厂和实验室的常规分析手段。

作者：张大煜 陆时凤

84024

DETERMINATION of COPPER and LEAD in BEER by ANODIC STRIPPING VOLTAMMETRY «Journal of the Wuxi Institute of Light Industry», Vol.3, No.3, 1984

KEYWORDS beer, copper lead determination, anodic stripping Voltammetry. ABSTRACT The results of the determination, obtained by Standard Addition method are fairly good, the detection range is from 10 to 360 ppb, Recovery is about 90—110%. The Variation coefficient of copper and lead is lower than $\pm 10\%$. The application is studied of Anodic stripping Voltammetry in the determination of traces of copper and lead in beer, in which the glassy carbon electrode is Used. Various working conditions such as deposition potential, deposition time and scanning rate are selected.

Author: Yu Hual Lu Jun

84022

THE MONTE CARLO SOLUTIONS for NINE-POINT SCHEME ELLIPTIC DIFFERENCE EQUATIONS «Journal of the Wuxi Institute of Light Industry», Vol.3, No.3, 1984

KEYWORDS nine-point scheme elliptic difference equations, Monte Carlo solutions, mean steps of random walk.

ABSTRACT In this paper, the Monte Carlo Solutions for the first, Second and third boundary value problems of nine-point scheme elliptic difference equations and estimation about its mean steps of random walk are given.

Author, Zhang Jianhua Fei Rongchang

84025

THE PRACTICE on DETERMINATION of P.D.I «Journal of the Wuxi Institute of Light Industry», Vol.3, No.3, 1984

KEYWORDS soybean, protein, index.

ABSTRACT The determination of the P.D.I. of soybean products plays an important rule in evaluating the degree of their denaturation and their quality. Recently, this kind of determination has been carried out by some institutes in our country. But the unification of instruments and consistency of methods are still lacking. A method for the determination of P.D.I. using instruments made in our country is introduced by this paper. The method approaches that designed by A.O.C.S. The data determined by this method is better in reproducibility. Thus, this method for the determination P.D.I. may be suggested as a conventional analytical method in oil mills or in laboratories.

Author: Zhang Daiyu Lu Jifon

84023

THE APPLICATION of MULTIPLE LINEAR REGRESSION MODEL and MICROCOMPUTERS to FORECAST the DEMAND of SPECIALIST «Journal of the Wuxi Institute of Light Industry», Vol.3, No.3, 1984

KEYWORDS personnel forecast, microcomputer, mathematical model.

ABSTRACT This paper explores the problem of forecasting the number of required specialists. A mathematical method has been studied for forecasting the demand of specialists using regression method and microcomputers. Four different kinds of regression models are given. By using mathematical models we may forecast the number of Specialists required in future.

Author, Zhou Zhenjiang