

切削用量的优化与 工时定额的科学制定法

李 儒 荀

(机械系)

工时定额是企业管理的重大课题之一,但目前还没引起人们充分的注意。厂矿企业现行的工时定额绝大多数已过时,落后,不合理。因为这些定额多半是以往参照苏联的数据或者在现场用不科学的手段实测的。人为的因素很大,因地,因厂,因人而异,很不适应当前提高企业管理水平的需要。为此本文介绍一些工时定额的科学制定方法。

对于金属切削加工制造系统而言,工时定额与切削用量(切削速度 v ,进给量 f 和切削深度 a_p)有非常密切的关系。

一、切削用量的优化

1、金属切削加工系统的性能指标

一个制造系统,应在保证产品质量的前提下,取得最大的经济效益。根据实际情况的不同,有三种不同的优化目标:在正常的生产情况下,为使产品具有最大的竞争能力,希望系统的成本最低;在生产短线产品或处于应急状态,以及在其它特殊情况下,又要求系统具有最高的生产效率;或者综合考虑成本与生产率两方面的因素,使系统获得最大利润率。最后一种优化目标在国外是比较普遍采用的。

对于单机而言,上述三种优化目标,可用下面的数学模型来描述。

1) 切削用量与刀具耐用度的关系 根据金属切削原理,在刀具正常磨损的情况下,切削用量与刀具耐用度存在下列关系(泰勒公式):

$$t = \frac{A}{v^{\frac{1}{m_v}} \cdot f^{\frac{1}{m_f}} \cdot a_p^{\frac{1}{m_a}}} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{A_v}{t^{\frac{1}{m_v}}} \quad (\text{当 } f, a_p \text{ 相对固定时}) \\ f = \frac{A_f}{t^{\frac{1}{m_f}}} \quad (\text{当 } v, a_p \text{ 相对固定时}) \\ a_p = \frac{A_a}{t^{\frac{1}{m_a}}} \quad (\text{当 } v, f \text{ 相对固定时}) \end{array} \right. \quad (2)$$

式中

t —刀具耐用度

v —切削速度

f —进给量

a_p —切削深度

$A, A_v, A_f, A_a, m_v, m_f, m_a$ —与刀具材料, 工件材料及其它切削条件有关的常数。并且 $m_v < m_f < m_a$, 即 v 对 t 的影响最大, f 次之, a_p 最小。

(在以下公式中, 我们略去了各物理量的因次及其相互关系, 在具体计算时必须考虑它们的单位及其换算。)

2) 单件工时和生产率 单机单工序的单件工时可按式计算:

$$T = T_m + T_w + T_d \cdot \frac{T_m}{t} \quad (3)$$

式中

T_m —单件切削时间; T_w —单件辅助时间(包括装、拆工件, 空行程以及必要的自然需要等无效时间); T_d —换刀时间。

生产率为单件工时的倒数:

$$Z_w = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_m + T_w + T_d \cdot \frac{T_m}{t}} \quad (4)$$

而单件切削时间可表示为:

$$T_m = \frac{K}{v \cdot f \cdot a_p} = \frac{K_n}{n \cdot f \cdot a_p} \quad (5)$$

式中

K, K_n —考虑到工件形状特征与尺寸, 加工余量以及切入, 切出, 试切长度等因素的常数。可从“金属机械加工工艺人员手册”等资料中查得。

把(1)(5)两式代入(3)式, 得用三参数(v, f, a_p)表示的单件工时的数学模型:

$$T = T(v, f, a_p) = \frac{K}{v \cdot f \cdot a_p} + T_w + T_d \cdot \frac{K \cdot v^{\left(\frac{1}{m_v} - 1\right)} \cdot f^{\left(\frac{1}{m_f} - 1\right)} \cdot a_p^{\left(\frac{1}{m_a} - 1\right)}}{A} \quad (6)$$

3) 单件加工成本 单件加工成本 C 可按式计算:

$$C = C_{BA} + C_m + C_w + C_d + C_t \quad (7)$$

式中

C_{BA} —本工序加工前的工件成本; C_m —单件切削时间的费用; C_w —单件辅助时间的费用; C_d —单件平均换刀时间的费用; C_t —单件平均刀具费用。

$$\begin{cases} C_m = (K_d + K_m) T_m \\ C_w = K_d \cdot T_w \\ C_d = K_d \cdot T_d \cdot \frac{T_m}{t} \\ C_t = C_y \cdot \frac{T_m}{t} \end{cases} \quad (8)$$

式中

K_d —单位时间内的工资和企业管理费用； K_m —单位时间内机床折旧费，电力，切削液等其它消耗费用； C_y —对于不重磨的刀具，为刀具每个切削刃的平均费用（包括磨刀工人的工资，刀具成本，工具磨床折旧费，砂轮的消耗等）。对于重磨刀具， $C_y = yM + G$ ， y 为刀具费用， M 为重磨次数， G 为重磨费用。

把(8)式代入(7)式得：

$$C = C_{BA} + (K_d + K_m) T_m + K_d \cdot T_w + K_d \cdot T_d \cdot \frac{T_m}{t} + C_y \cdot \frac{T_m}{t} \quad (9)$$

我国绝大多数企业在成本核算时，没有分别列出 K_d ， K_m 值，而只有一个平均工时费用 x ，则单件加工成本可表示为：

$$C = C_{BA} + x T_m + x T_w + (x T_d + C_y) \cdot \frac{T_m}{t} \quad (10)$$

把(1)(5)代入(10)得用三参数(v, f, a_p)表示的平均单件加工成本的数学模型：

$$C = C(v, f, a_p) = C_{BA} + x \cdot \frac{K}{v \cdot f \cdot a_p} + x T_w + (x T_d + C_y) \frac{\left(\frac{1}{m_v} - 1\right) \left(\frac{1}{m_f} - 1\right) \left(\frac{1}{m_a} - 1\right) K \cdot v \cdot f \cdot a_p}{A} \quad (11)$$

4) 利润率 P 利润率是分摊到该工序的单件售价 I ，单件加工成本 C 以及单件工时 T 的函数，按下式计算：

$$P = \frac{I - C}{T} = \frac{\text{单件利润}}{\text{单件工时}} \quad (12)$$

把(6)(11)代入(12)得用三参数(v, f, a_p)表示的利润率的数学模型：

$$P = P(v, f, a_p)$$

$$P = \frac{I - \left[C_{BA} + x T_w + x \cdot \frac{K}{v \cdot f \cdot a_p} + (x T_d + C_y) \frac{\left(\frac{1}{m_v} - 1\right) \left(\frac{1}{m_f} - 1\right) \left(\frac{1}{m_a} - 1\right) K \cdot v \cdot f \cdot a_p}{A} \right]}{\frac{K}{v \cdot f \cdot a_p} + T_w + T_d \cdot \frac{\left(\frac{1}{m_v} - 1\right) \left(\frac{1}{m_f} - 1\right) \left(\frac{1}{m_a} - 1\right) K \cdot v \cdot f \cdot a_p}{A}} \quad (13)$$

2. 用非线性规划原理优化切削用量

金属切削加工制造系统中切削用量的优化, 可以取(6), (11), (13)式中任一个作为优化的目标函数。但切削用量选择的好坏, 不仅与这三个目标函数有关, 而且还受到很多条件的限制, 例如加工精度, 光洁度, 切削力, 切削热, 积屑瘤, 振动, 刀具的磨损等等。据统计, 在金属切削加工系统中, 有三十多种变量影响到加工效果和切削用量的选择。显然, 要想把这些变量与切削用量的关系都找出来建立一定的数学模型是十分复杂和困难的。虽然变量越多, 优化效果越好, 但会增加计算上的困难和上机时间, 而且往往是难以实现的。因此, 一般根据生产实际情况, 只选择几个影响最大的变量作为优化的约束条件就行了。

例如, 把最低成本作为优化目标函数, 把生产率, 加工精度, 光洁度, 切削力等作为约束条件, 则可建立下列的优化切削用量的数学模型:

在约束条件:

$$\begin{cases} [T] - T(v, f, a_p) \geq 0 \\ [R_a] - R_{\max}(f, v) \geq 0 \\ [P] - P_m(v, f, a_p) \geq 0 \\ [\delta] - \delta(v, f, a_p) \geq 0 \\ [F_x] - F_x(v, f, a_p) \geq 0 \\ v_{\max} - v \geq 0 \\ v - v_{\min} \geq 0 \\ f_{\max} - f \geq 0 \\ f - f_{\min} \geq 0 \\ a_{p\max} - a_p \geq 0 \\ a_p - a_{p\min} \geq 0 \end{cases}$$

之下, 求最优解 (v, f, a_p) , 使目标函数:

$$C = C(v, f, a_p) \text{ 取最小值。}$$

式中

$[T]$ —根据生产纲领所要求的单件工时; $R_{\max}$ —工件表面残留面积的最大高度, 在刀具切削参数一定的情况下, 它是进给量 f 和切削速度 v 的函数; $[R_a]$ —根据工件光洁度要求允许的最大微观不平度; P_m —切削功率, 它是切削用量 v, f, a_p 的函数; $[P]$ —机床电动机许用功率; δ —工件径向弹性位移变形, 它是由于径向切削力 $F_r(v, f, a_p)$ 的作用而产生的; $[\delta]$ —工件精度允许的径向弹性位移变形; F_x —轴向切削力; $[F_x]$ —机床走刀机构强度允许的轴向力; $v_{\max}$ —机床所能提供的最大切削速度; $v_{\min}$ —为避免积屑瘤和鳞刺的产生所允许的最低切削速度; $f_{\max}$ —根据工件表面光洁度所允许的最大进给量; $f_{\min}$ —机床所能提供的最小进给量; $a_{p\max}$ —切削力所允许的最大切削深度; $a_{p\min}$ —工件表面质量及刀具耐用度所允许的最小切削深度。以上一些参数可以根据金属切削原理及力学原理确定和计算。(从略)

在上述数学模型的目标函数和约束条件中, 有的是参数 v, f, a_p 的非线性函数。所以这是一个非线性规划的优化问题, 它的一般形式为: 在约束条件

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

之下, 求最优解 $(x_1, \dots, x_n)$, 使目标函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 达到最小(或最大)值 $f(x_1, \dots, x_n)$ 或写成:

$$\begin{cases} \min f(x_1, \dots, x_n) \\ g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{cases}$$

在 $f(x_1, \dots, x_n)$, $g_j(x_1, \dots, x_n)$ ($j=1, \dots, m$) 中有非线性函数。

这类非线性规划问题, 有固定的解法和计算程序, 例如, 有直接搜索的数值解法, 复合形法, 以及比较先进的分层复合形法等。利用电子计算机是可以求得最优解的(关于具体解法的介绍从略)。但是, 这种优化方法计算十分复杂, 需要较大容量的电子计算机才能实现。而且, 它还有一个很大的缺点, 就是它是在脱离机床实际加工状态下计算的(所谓脱离机优化)。因此, 不管约束条件取得怎样多, 计算公式多么精确复杂(实际上不能完全做到这一点), 也根本不能反映随机变化的加工过程。因而“最优”的切削用量是“静态”的, 相对的, 有条件的。这种方法是难以普及的。

3、人工适应控制(MAC系统)优化切削用量

人工适应控制(MAC系统)优化切削用量的基本思想是: 利用一只可编程序的计算器, 把优化程序事先编好, 并贮存在它的输入介质(如磁带, 磁卡)上。然后通过生产现场操作人员几次把所使用的切削参数(例如单件工时或单件成本; 切削速度或转速; 刀具耐用度或反映刀具耐用度的其它参数, 例如两次换刀之间所加工的工件数, 或切屑体积等)输入计算器。根据优化方法和所编程序的不同, 计算器就能通过计算得到最优参数。或者自动与输入值进行比较, 并告诉(显示)操作者应按增加还是减小方向改变输入参数才能逼近最优目标。因此, 周期地通过几次试切, 测量, 输入和计算, 就能得到在具体生产情况下最优的切削参数。

MAC系统实质上是把计算与决策技术由操作者自己来实现, 操作者(人)起着自适应控制系统(ACO系统)中传感器, 以及机床与计算机之间接口的作用。这可大大简化制造系统, 无须改变现有的加工设备和增加大量投资(只需一只可编程计算器)就能很快实现切削用量的优化。并能充分发挥操作者的作用和适应随机变化的实际加工过程。具有很大的灵活性, 针对性和现实性。不过它只能单参数分别优化, 没有非线性规划那样具有整体概念。但在我国的具体情况下, 这无疑是一种值得推广的优化方法。

下面我们介绍 MAC 系统优化切削用量的原理及计算程序。

1) 优化原理 用切削速度 v (或转速 n) 作参数, 优化生产率。当 f , a_p 相对固定时(例如根据加工余量及粗, 精加工性质决定 a_p , 根据光洁度要求决定 f), 单件工时的公式(6)可以变换成如下形式:

$$T = T(v) = \frac{K_v}{v} + T_s + T_d \cdot \frac{\left(\frac{1}{m_v} - 1\right)}{\frac{1}{A_v}} = \frac{K_v}{v} \left(1 + \frac{T_d}{t}\right) + T_w \quad (14)$$

令

$N = \frac{t}{T_m}$ (两次换刀之间所加工的工件数), 则(14)可表述为:

$$T = T(v) = \frac{K_v}{v} + \frac{T_d}{N} + T_w \quad (15)$$

$$T = T(n) = \frac{K_n}{n} + \frac{T_d}{N} + T_w \quad (16)$$

在公式(15)中令 $\frac{\partial T(v)}{\partial v} = 0$, 就可求得对应最高生产率的刀具耐用度 t_p (最大生产率耐用度)。进而可求得对应最大生产率耐用度的切削速度 v_p 与单件加工成本 C_p :

$$\begin{cases} t_p = T_d \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right) \\ v_p = \frac{A_v}{t_p^{\frac{1}{m_v}}} \\ C_p = C_{BA} + \frac{x K_v}{(1 - m_v) v_p} \left(1 + \frac{m_v C_y}{x \cdot T_d} \right) + x T_w \end{cases} \quad (17)$$

②用切削速度 v 作参数, 优化单件加工成本, 当 f, a_p 相对固定时, 单件加工成本的公式 (11) 变成如下形式:

$$\begin{aligned} C &= C_{BA} + x \frac{K_v}{v} + x T_w + (x T_d + C_y) \frac{K_v \cdot v \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right)}{\frac{1}{A^{\frac{1}{m_v}}}} \\ &= C_{BA} + x \left(\frac{K_v}{v} + T_w \right) + (x T_d + C_y) \cdot \frac{K_v}{v \cdot t} \end{aligned} \quad (18)$$

为了便于使用 MAC 程序, 最好用两次换刀之间所加工的工件数 N 作为衡量刀具耐用度的指标, 则单件加工成本为:

$$C = C(v) = C_{BA} + \frac{x K_v v}{v} + (x T_d + C_y) \frac{1}{N} + x T_w \quad (19)$$

或

$$C = C(n) = C_{BA} + \frac{x K_n}{n} + (x T_d + C_y) \frac{1}{N} + x T_w \quad (20)$$

在公式(18)中, 令 $\frac{\partial C(v)}{\partial v} = 0$, 则求得对应最低加工成本的刀具耐用度 t_c (最经济耐用度), 进而可求得对应最经济耐用度的切削速度 v_c 和单件加工成本 C_c :

$$\begin{cases} t_c = \frac{x T_d + C_y}{x} \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right) \\ v_c = \frac{A_v}{t_c^{\frac{1}{m_v}}} \\ C_c = C_{BA} + x T_w + \frac{x K_v}{(1 - m_v) v_c} \end{cases} \quad (21)$$

③用切削速度 v 作参数时优化利润率 当 f, a_p 相对固定时, 利润率的公式(13)可写成如下形式:

$$\begin{aligned} I &= \left[C_{BA} + x T_w + \frac{x K_v}{v} + (x T_d + C_y) \frac{K_v \cdot v \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right)}{\frac{1}{A^{\frac{1}{m_v}}}} \right] \\ P &= \frac{K_v}{v} + T_w + T_d \cdot K_v \cdot v \left(\frac{1}{m_v} - 1 \right) / A^{\frac{1}{m_v}} \end{aligned} \quad (22)$$

同理: 令 $\frac{\partial P(v)}{\partial v} = 0$, 可求得对应最大利润率的刀具耐用度 t_{eg} 的公式:

$$t - \frac{1}{I} \left[\left(\frac{1}{m_v} - 1 \right) (T_w C_v + I \cdot T_d) + \frac{K_v C_v}{m_v A_v} \cdot t^{m_v} \right] = 0 \quad (23)$$

显然上式没有解析解, 须用下列迭代公式计算:

$$t_{n+1} = \frac{1}{I} \left[\left(\frac{1}{m_v} - 1 \right) (T_w C_v + I \cdot T_d) + \frac{K_v C_v}{m_v A_v} t_n^{m_v} \right] \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (24)$$

式中

t_n —第 n 次迭代所求得的 t 值; t_{n+1} —第 $(n+1)$ 次迭代所求得的 t 值。

迭代过程进行到 $|t_{n+1} - t_n| < \varepsilon$ 时为止, ε 为允许的迭代误差, 一般可取 0.1。运算时可取最经济耐用度 t_e 作为迭代的初始值(即 $t_0 = t_e$)。由此可求得最大利润率耐用度 t_{eg} , 进而可求得对应 t_{eg} 的切削速度 v_{eg} 和最大利润率 p_{eg} :

$$\begin{cases} t_{eg} = t_{n+1} \quad (= t_n) \\ v_{eg} = \frac{A_v}{t_{eg}^{m_v}} \\ p_{eg} = \frac{I - \left[x \left(\frac{K_v}{v} + T_w \right) + (x T_d + C_v) \frac{K_v}{v_{eg} \cdot t_{eg}} \right]}{\frac{K_v}{v_{eg}} (1 + T_d/t_{eg}) + T_w} \end{cases} \quad (25)$$

2) 优化方法与优化程序 MAC 系统有两种优化方法与程序, 一种称为分析优化, 另一种称为监控优化。①分析优化 对于 $t-v$ (或 f) 符合指数关系 (在 $\lg v - \lg t$ 双对数坐标系中, $t-v$ 呈线性关系), 而且切削过程比较稳定的情况, 可直接按前述的方法建立的数学模型来进行优化程序设计, 输入计算器进行计算。具体作法是: 首先确定保证加工质量的刀具磨钝标 VB (一般取刀具后刀面磨损带中部的平均磨损量), 并根据具体加工情况和工件, 确定出优化目标函数中的 K_v (或 K_n), x 及 C_v 值。然后按有关资料或技术人员, 操作人员的实际经验, 选用 2—4 个 v (或 n), 用同样几何参数的刀具, 在同样切削参数 (变参数 v 除外) 下进行切削, 测出相应的刀具耐用度 t (或 t 时间内加工出的工件数 N), 把一双双 v, t 输入计算器 (或在 $\lg v - \lg t$ 双对数坐标纸上) 按线性回归法求出对应的参数 m_v 和 A_v (在 $\lg v - \lg t$ 双对数坐标图上, m_v 为直线的斜率, A_v 为 $\lg v$ 轴上的截距), 计算器就能按公式 (17) (优化生产率时) 或公式 (21) (优化成本时) 或公式 (25) (优化利润率时) 计算出最佳的 t_p 或 t_c 或 t_{eg} 以及其它参数。由于最佳转速往往不是机床性能参数上所具有的实际转速, 因此再先后输入与最佳转速邻近的机床上的高、低挡转速, 计算器又重复上述过程, 并进行比较, 自动显示出应选用的最佳实际转速 n_{pe} , 或 n_{ce} , 或 n_{ge} , 因此运用 MAC 系统, 只须经过几次试切, 就能得到最佳的切削参数。用分析优化法求最佳目标参数的程序框图见图 1, 图 2, 图 3。②监控优化 监控优化与分析优化的主要区别在于: 监控优化不必推导复杂的优化目标函数 (或难以求得优化目标与切削参数之间的函数关系)。而靠在生产现场, 用试验和监控加工过程的方法来求最优参数, 它适用于优化变量与优化目标之间, 例如 v (或 f) 与 t 之间不呈指数关系的情况或切削过程随机因素比较多, 影响又比较大, 以及单参数得不到最优值的情况; 也可用于转速级数有限的机床 (如专用机床) 上。

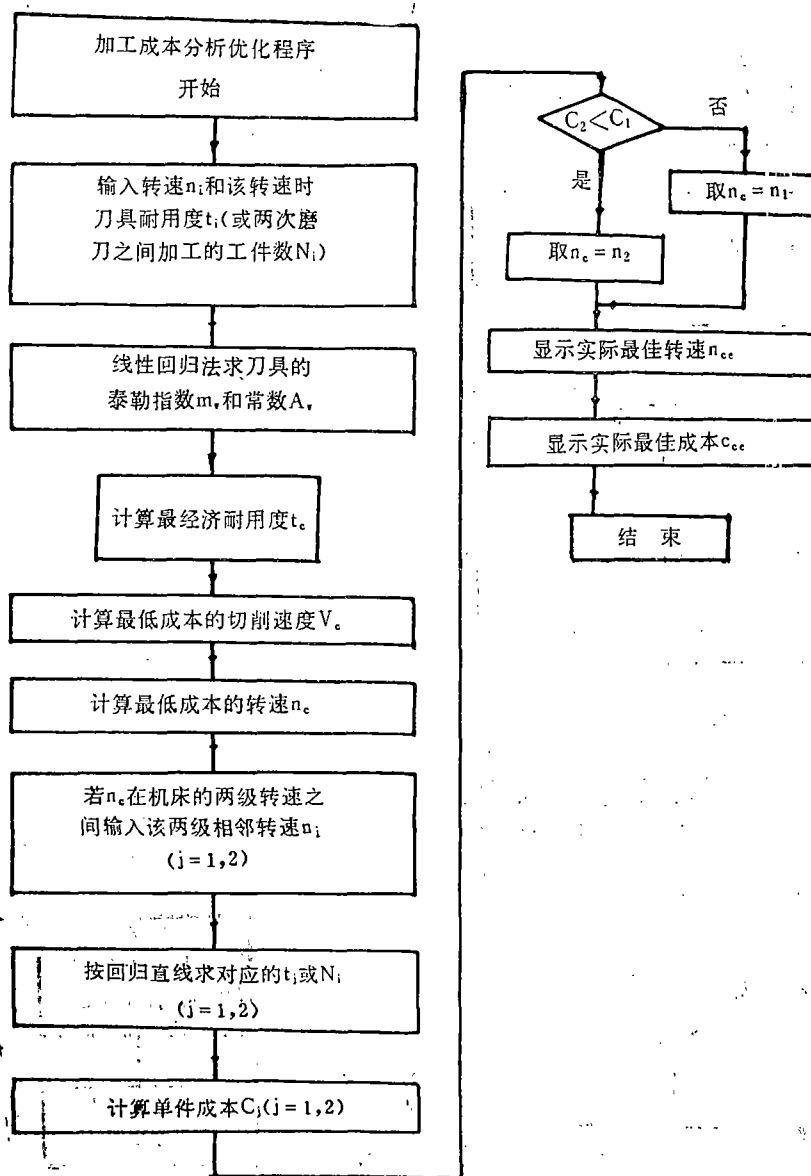


图1 加工成本分析优化程序框图

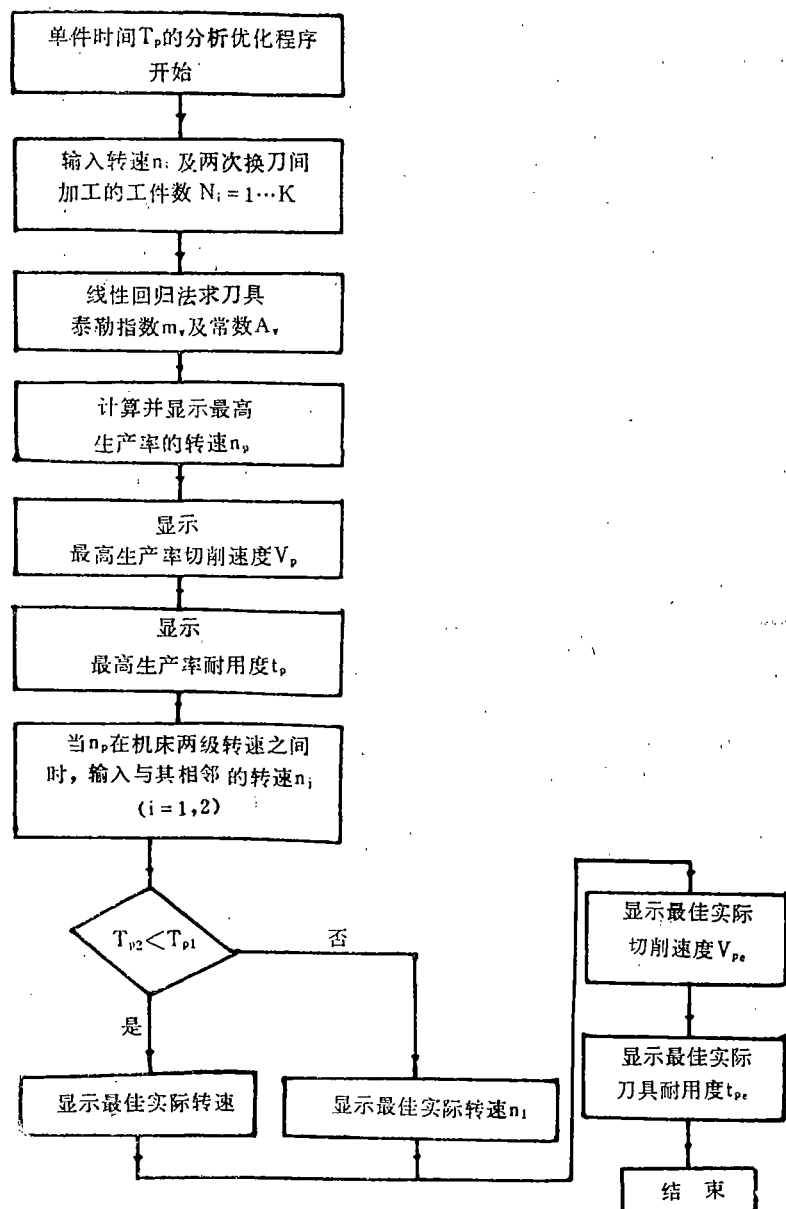


图2 最高生产率分析优化程序框图

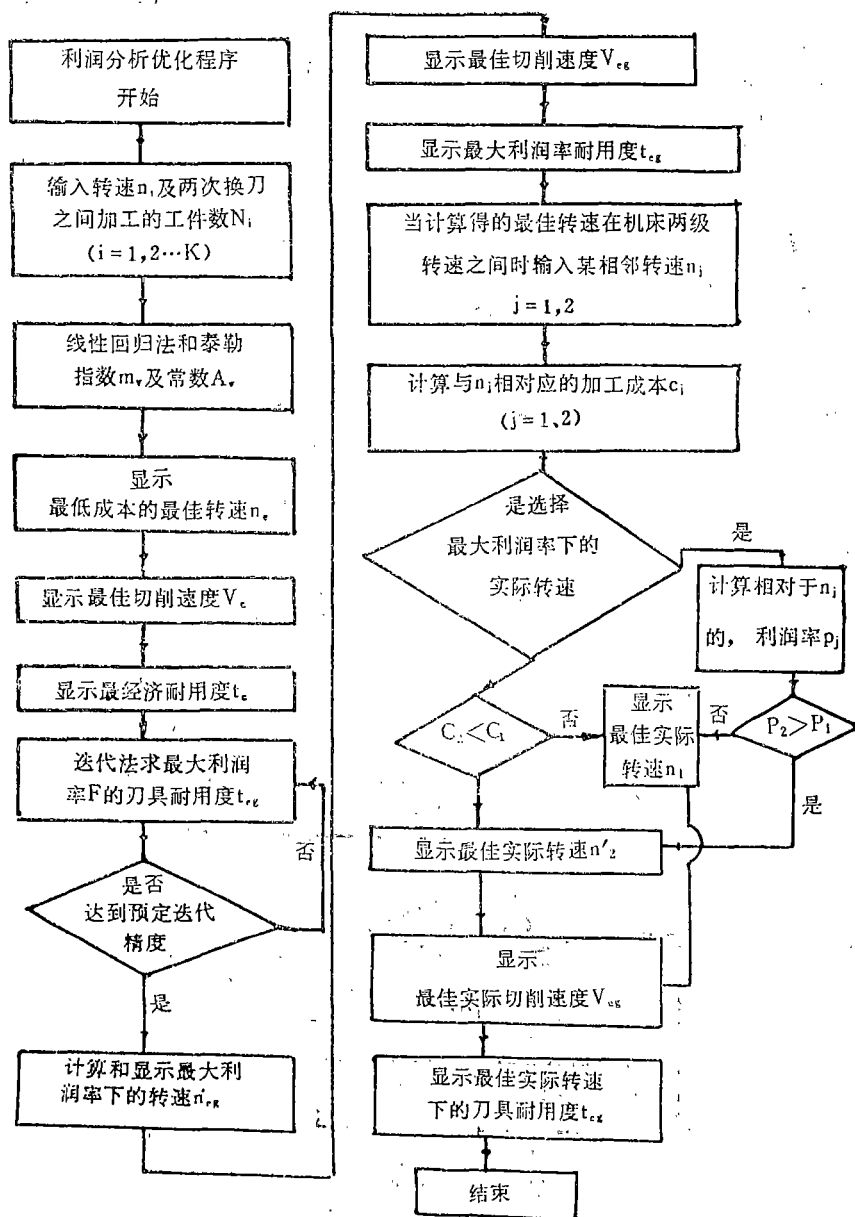


图3 最大利润率的分析优化程序框图

下面以监控优化单件成本为例,说明监控优化的方法与程序。首先给计算器存入一个按公式(20)计算单件成本的程序,然后根据本工序的具体情况,选用适当的切始值 n_1 进行加工,达到磨钝标准 VB 后测出加工的工件数 N_1 ,将测得的 N_1 及 n_1 输入计算器,计算器就能计算出这次的加工成本 C_1 。然后再取另一个转速 n_2 (例如由高档向低挡变化)进行加工,测得这时的 N_2 ,并将 N_2 及 n_2 输入计算器,计算器就能计算此时的单件加工成本 C_2 ,并能自动与前一挡的单件成本 C_1 进行比较。如果 $C_1 > C_2$ (即 $C_1 - C_2 > 0$),这表示第一次成本高。因此计算器自动显示相对低成本的转速 n_2 。这也表明,还要继续降低转速进行监控。再重复进行上述过程,直到出现 $C_{i+1} > C_i$,此时计算器显示的 n_i ,就是取得最低单件成本的最佳实际转速。一般经过3~5点试切就可取得最佳值。

同理,按同样的步骤,也可监控优化生产率或利润率;也可在同一转速和切削深度下(即 v, a_p 不变),改变进给量 f ,求优化成本的进给量 f_{ec} 或优化生产率的进给量 f_{pe} 或优化利润率的进给量 f_{ego} 。

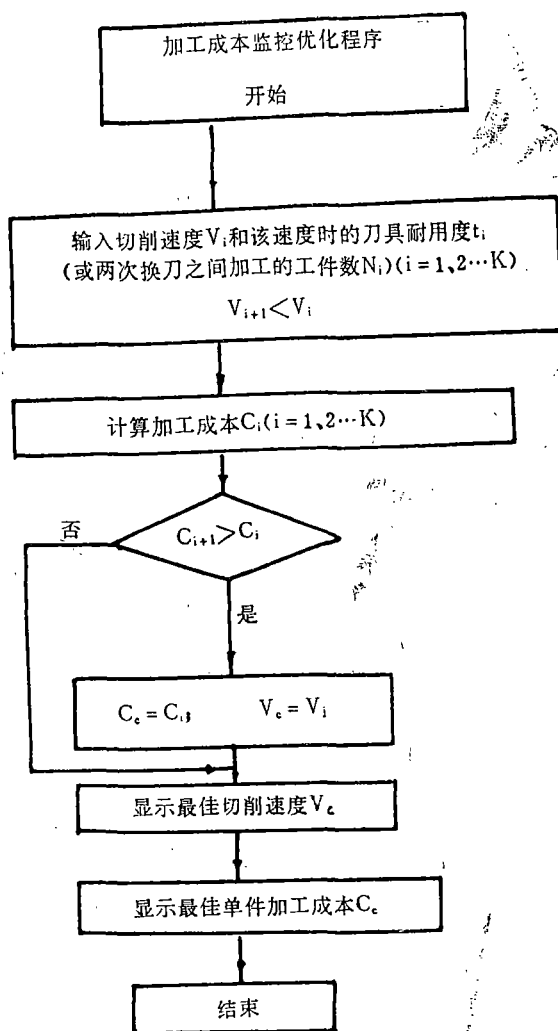


图4 加工成本监控优化程序框图

由以上的分析可以看出, 监控优化实质上采用的是逐步逼近法, 对于多参数优化, 还可结合采用正交试验设计法, 以较少的试验次数较快地求得最优值。

监控优化的程序框图见图4, 图5, 图6。

二、工时定额的科学制定法

求出了具体加工条件下的最佳切削用量之后, 就给科学地制定工时定额提供了依据。与切削用量的优化目标相适应, 根据不同的要求有三种不同的工时定额。下面分两类情况, 讨论工时定额的制定方法, 一类是单机定额, 第二类是系统定额。

1、单机定额

对于确定的机床与加工工序而言, 各类工时定额的计算方法如下: 1) 追求最低成本的工时定额 最低成本的单件工时 T_p 。可按下式计算:

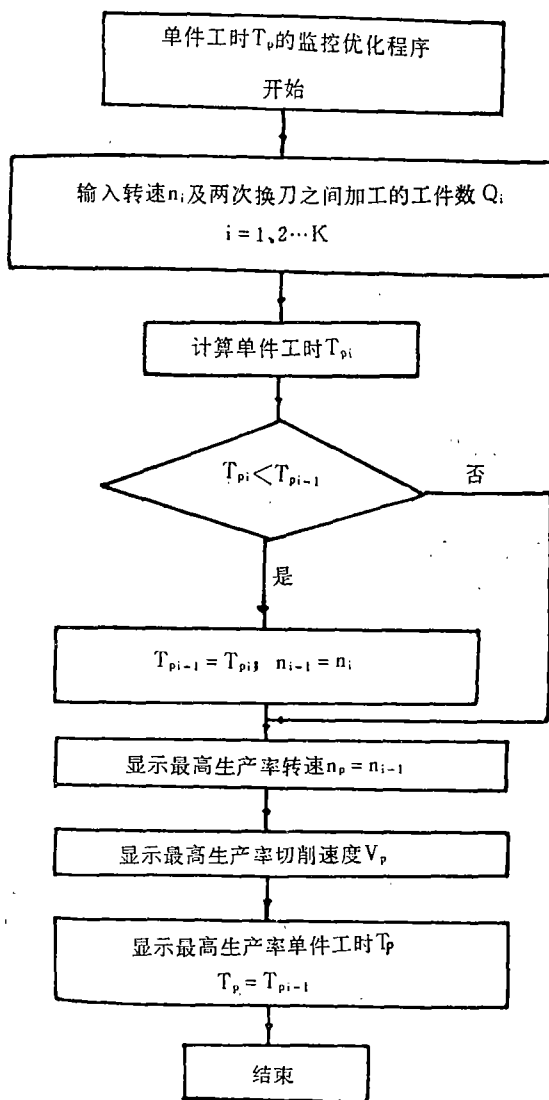


图5 最高生产率监控优化程序框图

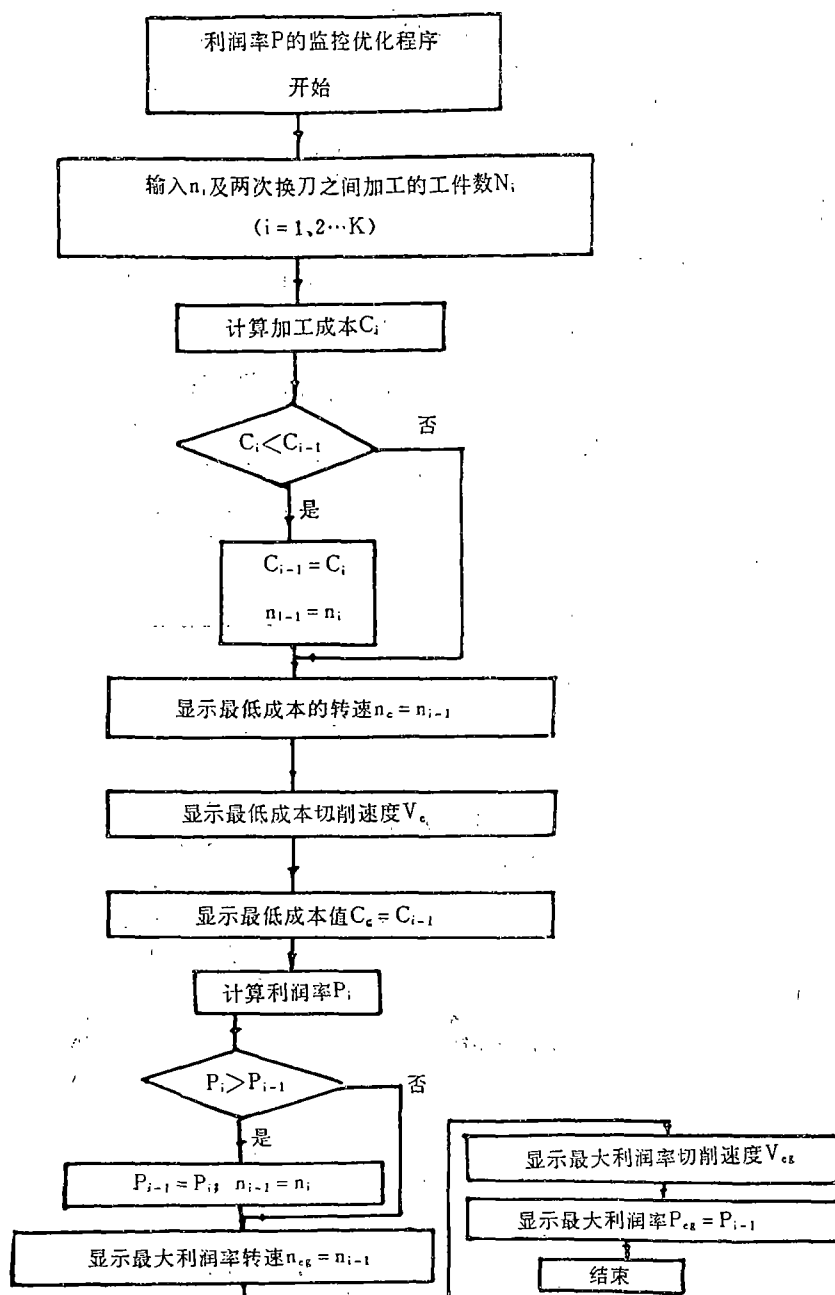


图6 最大利润率监控优化程序

$$T_c = T_{mc} + T_w + T_d \cdot \frac{T_{mc}}{t_c} \quad (26)$$

式中 T_{mc} —最低成本条件下的切削时间。

$$T_{mc} = \frac{K}{v_c \cdot f_c \cdot a_{pc}} = \frac{K_n}{n_c \cdot f_c \cdot a_{pc}} = \frac{K_m}{f_{mc}} \cdot i \quad (27)$$

式中

v_c, f_c, a_{pc} —对应最经济耐用度 t_c 的切削用量; f_{mc} —对应最经济耐用度 t_c 的每分钟进给量; i —行程次数, 一般情况 $i = \frac{M}{a_p}$, M 为总加工余量; K_m —与工件形状、尺寸、切入、切出、试切长度及加工方法和特点有关的常数, 可根据加工简图计算或从“金属机械加工工艺人员手册”等资料查出。

2) 追求最高生产率的工时定额 最高生产率的工时定额 T_p 可按下式计算:

$$T_p = T_{mp} + T_w + T_d \cdot \frac{T_{mp}}{t_p} \quad (28)$$

式中

T_{mp} —最高生产率条件下的切削时间。

$$T_{mp} = \frac{K}{v_p \cdot f_p \cdot a_{pp}} = \frac{K_n}{n_p \cdot f_p \cdot a_{pp}} = \frac{K_m}{f_{mp}} \cdot i \quad (29)$$

式中

v_p, f_p, a_{pp} —对应最高生产率耐用度 t_p 的切削用量; f_{mp} —对应最高生产率耐用度 t_p 的每分钟进给量。

3) 追求最大利润率的工时定额 最大利润率的单件工时 T_{eg} 按下式计算:

$$T_{eg} = T_{meg} + T_w + T_d \cdot \frac{T_{meg}}{t_{eg}} \quad (30)$$

T_{meg} —最大利润率条件下的切削时间。

$$T_{meg} = \frac{K}{v_{ep} \cdot f_{ep} \cdot a_{peg}} = \frac{K_n}{n_{eg} \cdot f_{eg} \cdot a_{peg}} = \frac{K_m}{f_{meg}} \cdot i \quad (31)$$

式中

v_{ep}, f_{eg}, a_{peg} —对应最大利润率耐用度 t_{eg} 的切削用量; f_{meg} —对应最大利润率耐用度 t_{eg} 的每分钟进给量。

2、系统定额

这里所指的系统是指的金属切削加工制造系统。它是由几个相互作用, 相互依赖的单机或企业所组成, 并且具有特定功能的有机整体。它可以指一个地区, 一个企业, 一个车间或一个工段, 小组。因此, 在一个系统中, 单机定额只能相对的指某一单机的某一目标最优, 并不能说明整个系统最优。在单机定额确定之后, 必须考虑整个系统的定额, 以便使整个系统具有最高的生产率, 或最低成本, 或最大利润率。

系统定额实质上是系统工程学的问题, 它涉及的问题很深, 很广。这里我们只限于讨论

这样的问题：即系统的生产任务和单机定额已定，如何组织生产，分配任务，使系统的某一目标最优。也就是说只讨论系统工程学中的分配问题。下面举几个例子加以说明。

例1，某地区有几类企业，各类企业中各有 N_i 个。现用来生产某产品，该产品一套中设有 m 个不同的零件，它们分别成比例 $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ 。由于这些企业规模大小，技术条件，设备情况及管理水平不同，其生产率是不相同的，设第 i 类企业加工 j 类零件的生产率为 a_{ij} 。现问如何组织生产、分配任务，使产品总套数最多。

设 x_{ij} 表示第 i 类企业生产第 j 种零件的企业数。根据题意，可建立下列数学模型：

求 $Z = Z_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij} (j=1, 2, \dots, m)$ 的最大值，并满足约束条件：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = N_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ Z_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, m) \\ \frac{Z_1}{P_1} = \frac{Z_2}{P_2} = \dots = \frac{Z_m}{P_m} \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (j=1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

例2 现有几种不同规格的产品、要分派在几台不同性能的机床上加工。设 a_{ij} 为产品 i 在机床 j 上的工时定额。问如何分配任务使总工时(系统定额)最小。

设： x_{ij} 只取两个数值：0 或者 1。当 $x_{ij}=1$ 时，表示产品 i 分派在机床 j 上加工；当 $x_{ij}=0$ 时，表示产品 i 不分派在机床 j 上加工。于是根据题意，可建立下列数学模型：

$$\min x_o = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_{ij}$$

并满足下列约束条件：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i=1, \dots, n) \\ x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, n) \end{cases}$$

数学上可以证明，这个问题等价于：

$$\min x_o = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_{ij}$$

并满足下列约束条件：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

2) 系统定额的数学模型 以上这些问题都可归总为一种形式, 即求

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

满足约束条件:

$$\begin{cases} x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i (> = <) b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

使得

$$f(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \text{ 取最大或最小值。}$$

这是典型的线性规划问题, 它更可以化成下列标准形式:

求一组变量: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

使得

$$f(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \text{ 取最小值。}$$

这种标准形式有两个明显的特征: ①约束条件方程组是一组等式约束方程组; ②线性规划的目标函数是求极小值。

如果给出的线性规划问题是非标准形式, 应设法将其化为标准形式, 然后求解。

例如: ①若约束条件方程组是小于不等式组:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

使得

$$f(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \text{ 取最小值}$$

为化成标准形式, 需在约束条件方程组中的每个不等式的左端增添一个非负的松弛变量 x_{n+i} , 从而可得标准形式:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

②若约束条件方程组是大于等于型方程组:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i x_i \quad \text{取最小值}$$

为化成标准形式,需在约束条件方程组的每个不等式的左端减去一个非负的剩余变量 x_{n+i} ,从而可得标准形式:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

③如果对变量 x_i 没有非负限制(即自由变量),可以引进两个非负变量 $x'_i \geq 0, x''_i \geq 0$,令 $0x_i = x'_i - x''_i$,就化为全部变量都有非负限制。

④如果问题求目标函数 $f(x) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$ 的最大值。可化为求目标函数 $f'(x) = -C_1 x_1 - C_2 x_2 - \dots - C_n x_n$ 的最小值。

求解线性规划问题的标准形式,有成熟的解法和程序,最常用的是单纯形法。一些简单情况用手算也不十分复杂。这里就从略了。

参 考 文 献

- [1] 美国亚利桑那州立大学 M. C. Shaw 访华报告,“用手动适应控制来提高生产率”《机床》,1980第8期。
- [2] “MAC: New key to Higher productivity”, Shaw M. C. and Koman-duri. R. “American machinist”, 121, No 5, (may 1977)。
- [3] “Experience with manual Adaptive Control”, Shaw. M. C., Avery. J. and Frankman, J.《Annals of the CIRP》Vol 27, I, 1978。
- [4] 曹正铨等,“人工适应控制[MAC]—优化加工过程的新方法”,《湖南大学学报》Vol, 9, No2, 1982。
- [5] 贝季瑶,“推广应用人工适应控制的建议”,《机械制造》,1982。
- [6] 陈诚斋,“切削过程最佳化”,北京航空学院,1981。
- [7] 中国科学院数学研究所运筹室编,《最优化方法》,1980。
- [8] 刘余善等编著,《实用管理系统工程》,1982。