第 11 卷 无锡轻工业学院学报 Vol. 11
第 1 期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1992 No. 1

一类高维 Cantor 型集合的 Hausdorff 维数

许 友

（基础课部）

摘要 本文利用有关集合直积的 Hausdorff 维数与 Hausdorff 密度关系的理论，得到了一类高维 Cantor 型集合的 Hausdorff 维数，由此可构造出具有任意给定的 Hausdorff 维数的集合。

关键词 Hausdorff 维数；Hausdorff 密度；高维 Cantor 型集合

0 引 言

Hausdorff 维数是刻划分形（fractal）集合的整体性质的指标，但是对于任给的一个集合，要求出它的 Hausdorff 维数往往是十分复杂的，并且不易求出。Falconer 在[1]中给出了一类 Cantor 型集合的构造及其 Hausdorff 维数，本文在此基础上并利用有关集合直积的 Hausdorff 维数与 Hausdorff 密度的关系的有关理论得到了一类高维 Cantor 型集合的 Hausdorff 维数，根据这个结果我们可以构造出具有任意给定的 Hausdorff 维数的集合。

1 定理及其证明

首先，我们给出线性 Cantor 型集合的定义。任给 $0<s<1$，令 E_0 表示直线上的单位区间，可用归纳法定义集合 $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$，其中每个 E_i 是有限个闭区间的并集。我们可以对 E_i 的每个闭区间 I_{ij}（下标 ij 表示 E_i 的从左数起第 j 个闭区间）来定义 $E_{i+1} \cap I_{ij}$，方法如下：令 $m_{ij} \geqslant 2$ 是整数，令 $J_1, J_2, \cdots, J_{m_{ij}}$ 是等长且等距分布的 I_{ij} 的闭子区间，它们的直径 $|J_k|$ 满足

$$|J_k|^s = \frac{1}{m_{ij}}|I_{ij}|^s, \qquad k = 1, 2, \cdots, m_{ij},$$

且使 J_1 的左端点和 $J_{m_{ij}}$ 的右端点分别与 I_{ij} 的左、右端点相重合，m_{ij} 可随 I_{ij} 而变，于是规定 $E_{i+1} \cap I_{ij} = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_{m_{ij}}$，而 E 定义为 $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$，当所有 m_{ij} 有界时，我们称这种集

收稿日期：1991-03-13

E 为线性 Cantor 型集合。

以 $\mathscr{H}^s$ 表示 s—维 Hausdorff 测度，我们有

引理 1 设 E 是线性 Cantor 型集合，则 $\mathscr{H}^s(E)=1$.

证明 见参考文献 1，定理 1.15.

引理 2 设 E 中线性 Cantor 集合，I_{ij} 是 E 的构造过程中出现的 E_i 的一个小的闭区间，则 $\mathscr{H}^s(E\cap I_{ij})=|I_{ij}|^s$.

证明 完全类似于引理 1 的证明。

引理 3 设 $E\subset R^m$，E 具有正的有限的 α—维 Hausdorff 测度，E 在其所有点上具有正的 α—维 Hausdorff 下密度，则对任何 R^n 中子集 F，有

$$\dim(E\times F)=\dim(E)+\dim(F).$$

证明 见参考文献 2，定理 10′.

上述引理中，R^m、R^n 分别表示 m —维和 m —维欧几里得空间，dim 表示 Hausdorff 维数，$E\times F$ 表示集合 E 和 F 的直积，集 E 在点 x 的 α—维 Hausdorff 下密度定义为

$$\underline{D}^\alpha(E,x)=\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^\alpha(E\cap B_r(x))}{(2r)^\alpha},$$

其中 $B_r(X)$ 表示以 x 为中心，r 为半径之闭球。

引理 4 设 E 是线性 Cantor 型集合，dim $(E)=s$，则 E 在其所有点上的 s—维 Hausdorff 下密度大于 0.

证明 设 $x\in E$，则必有 $x=\bigcap_{i=1}^{\infty}I_{ij_i}$，其中 I_{ij_i} 表示 E 之构造过程中出现的 E_i 的从左数起第 j_i 个闭区间。我们有

$$|J_{ij_i}|=\left(m_0m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{(i-1)j_{(i-1)}}\right)^{-\frac{1}{s}}.$$

由引理 2 得

$$\mathscr{H}^s(I_{ij_i}\cap E)=\left(m_0m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{(i-1)j_{(i-1)}}\right)^{-1},$$

其中 m_0 表示 E_1 所包含的闭区间的个数。易见，$|J_{ij_i}|$ 是一列关于 i 的趋向于 0 的数列，所以，对于任何足够小的 $r>0$，总存在 i、j 使得

$$\left(m_0m_{1j_1}\cdots m_{ij_i}\right)^{-\frac{1}{s}}\leqslant r<\left(m_0m_{1j_1}\cdots m_{(i-1)j_{(i-1)}}\right)^{-\frac{1}{s}},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{H}^s(E\cap Br(x))}{(2r)^s}&\geqslant\frac{\mathscr{H}^s(E\cap I_{ij_i})}{(2r)^s}\\&\geqslant\frac{\left(m_0m_{1j_1}\cdots m_{ij_i}\right)^{-1}}{\left[2\left(m_0m_{1j_1}\cdots m_{(i-1)j_{(i-1)}}\right)^{-\frac{1}{s}}\right]^s}\\&=\frac{1}{2^sm_{ij_i}}\\&\geqslant\frac{1}{2^sM}\\&>0\end{aligned}$$

其中 M 是所有 m_{ij_i} 的上界，$M<+\infty$. 证毕。

定理　设 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 是欧氏空间中 n 个集合，其中 $n-1$ 个是线性 Cantor 型集合，则

$$\dim(F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i).$$

证明　利用上述引理 4 并反复应用引理 3 即得。

根据这个定理，我们可以构造集合，使它的 Hausdorff 维数等于任意给定的正数值，这只要先构造出具有适当 Hausdorff 维数的线性 Cantor 型集合，再作它们的直积就行了。

参考文献

1　Falconer K J. The geometry of fractal sets. Cambridge University Press, 1985

2　Wegmann H. Die Hausdorff—Dimension Von kartesischen Produkten metrischer Räume. J Reine Angew Math 1971; 246, 46-75

The Hausdorff Dimension of A Kind of Generalized High Dimensional Cantor Sets

Xu You

(Dep. of Fundamental Course)

Abstract　In this paper, by using the theorem about the relationship between the Hausdorff dimension of Cartesian products of sets and Hausdorff densities, we get the Hausdorff demension of a kind of generalized high dimensional Cantor sets. According to the result, we can construct the set whose Hausdorff dimension is equal to any givcn positive number.

key words　Hausdorff dimension: Hausdorff density: generalized high dimensional Cantor set