

摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上 任意点的曲率半径

——Euler-Savary 公式的一个应用

顾连森

(机械工程系)

摘要 应用 Euler-Savary 公式导出了摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上任意点曲率半径的一个新公式,解决了平面机构啮合理论中长期来没有解决的一个难题,新公式不仅可以先于凸轮廓线方程求出廓线上任意点的曲率半径,还找到了曲率半径和压力角之间的内在联系,从而可以直接把强度条件和传力性能结合起来考虑,有利于进一步简化该种凸轮机构的优化设计。

关键词 曲率半径;凸轮廓线;Euler-Savary 公式;瞬心的移动速度;压力角

0 前 言

Euler-Savary 公式是平面连续接触传动的普遍啮合方程式,它给出了平面共轭曲线的曲率半径和瞬心线的曲率半径之间的关系,对求高副构件的曲率半径以及一般低副机构中连杆上各点所画轨迹的曲率半径是很有用处的。

Euler-Savary 公式的一般形式如下:

$$\left(\frac{1}{\rho_2 + PB} + \frac{1}{\rho_1 - PB} \right) \cos\beta = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1)$$

式中:

ρ_1, ρ_2 ——共轭曲线在接触点 B 处的曲率半径

PB ——瞬心 P 至共轭曲线接触点 B 之间的距离

β ——共轭曲线在接触点 B 处的公法线与瞬心线在 P 点的公法线之间的夹角

R_1, R_2 ——两瞬心线在 P 点的曲率半径

对于定传动比的齿轮机构,不论是渐开线齿轮还是摆线齿轮机构,当一齿轮的齿廓曲率

半径为已知时,则与之共轭的另一齿轮的齿廓曲率半径应用式(1)不难求出,这是因为瞬心线的曲率半径是定值。

对于变传动比的机构,由于瞬心线的曲率半径是变值,不易确定,因此应用式(1)来求导如摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上任意点的曲率半径是很困难的,为此文献[1]寻找了另一种形式的平面连续接触传动的普遍啮合方程式。

求导铰链四杆机构和曲柄滑块机构中连杆上任意点所画轨迹的曲率半径可以采用 Euler-Savary 公式的另一种形式:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \cos \beta = \frac{\omega}{u} \quad (2)$$

式中

r ——瞬心 P 至动点的距离

r_1 ——瞬心 P 至动点曲率半径中心的距离

ω ——动瞬心线的角速度

u ——瞬心 P 的移动速度

β ——意义与式(1)中的 β 相同

* 文献[2]第 125 页有形式: $\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PO} \right) \sin \theta = \frac{\omega}{V_P}$ 称为 Euler-Savary 公式的第一种形式。

怎样应用 Euler-Savary 公式来求导摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上任意点的曲率半径长期来一直是从事平面机构啮合理论研究的学者探索的问题之一。作者在 1989 年 9 月结合式(1)和式(2)的特点找到了解决这一问题的途径和方法,导出了计算摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上任意点的曲率半径的一个新公式,所得新公式不仅可以先于凸轮廓线方程求出轮廓线上任意点的曲率半径,还找到了曲率半径和压力角之间的内在联系,从而可以直接把强度条件和传力性能结合起来考虑,进一步简化了该凸轮机构的优化设计。

1 公式的推导

摆动滚子从动件盘形凸轮机构有 A, B, C 和 D4 种基本型式,这 4 种基本型式的凸轮机构在文献[3~5]中都有介绍,其基本特征参见本文附录 1。鉴于目前国内公认的是 A 型和 C 型两种型式,而国外如原东德公认的是 A 型和 B 型(文献[6]中称为 F 型和 P 型凸轮机构)两种型式,因此这里以 A 型凸轮机构为例来介绍如何应用 Euler-Savary 公式求导摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上任意点的曲率半径。

图 1 所示为 A 型摆动滚子从动件盘形凸轮机构在推程的某一位置时的情况,图中构件 1 为凸轮,构件 2 为摆杆, S_1 和 S_2 分别为

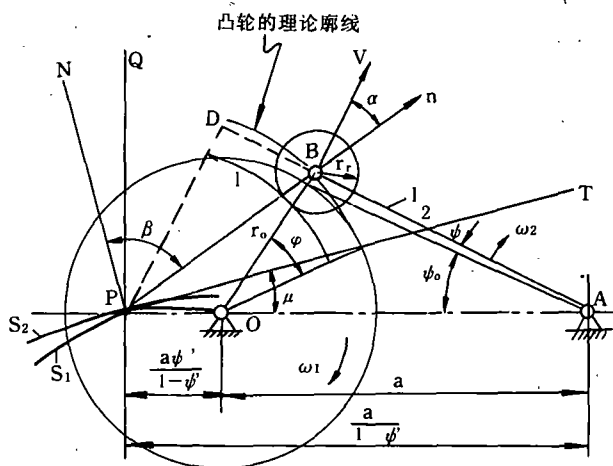


图 1 A 型凸轮机构在某一位置时的情况

凸轮和摆杆的瞬心线, a 为机构中心距, l 为摆杆长度, r_0 为凸轮基圆半径, r_1 为滚子半径。

先不考虑滚子的作用, 研究凸轮理论廓线上任意点的曲率半径。

如果注意到式(1)和式(2)等式右边项存在如下关系

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\omega}{u}$$

则式(1)可改写成

$$\left(\frac{1}{\rho_2 + PB} + \frac{1}{\rho_1 - PB} \right) \cos\beta = \frac{\omega}{u} \quad (3)$$

* 文献[7]第130页式(7~19)。

此式可看成是 Euler-Savary 公式的又一种形式, 当不考虑滚子作用时, 也就是把摆杆看成尖顶从动件, 此时与摆杆尖顶接触的是凸轮的理论轮廓, 显然, 摆杆尖顶也即是滚子中心 B 处的曲率半径

$$\rho_2 = 0 \quad (a)$$

为求瞬心 P 至接触点 B 的距离 PB 的长度, 自瞬心 P 引直线 AB 的垂线, 垂足 D 在直线 AB 的延长线上, 观察直角三角形 PBD , 可见

$$PB = \frac{PD}{\cos\angle BPD}$$

而

$$PD = PA \sin(\psi_0 + \psi) = \frac{a}{1 - \psi'} \sin(\psi_0 + \psi)$$

$$\angle BPD = \alpha$$

所以

$$PB = \frac{a \sin(\psi_0 + \psi)}{(1 - \psi') \cos \alpha} \quad (b)$$

式中

ψ_0 —— 摆杆的初位角 $\psi_0 = \cos^{-1} \frac{a^2 + l^2 - r_0^2}{2al}$

ψ —— 摆杆的摆角, 由所选的运动规律确定, 它是凸轮转角 φ 的函数

ψ' —— 机构的类角速度 $\psi' = \frac{d\psi}{d\varphi}$

α —— 机构压力角

为求角 β , 过瞬心 P 作瞬心线 S_1 和 S_2 的公切线 PT , 再过 P 点作 PT 的垂线得瞬心线 S_1 和 S_2 在 P 点的公法线 PN . 所以

$$\beta = \angle BPN$$

再作 PO 的垂线 PQ , 则有

$$\angle BPN = \angle BPD + \angle DPQ + \angle QPN$$

又

$$\angle DPQ = \psi_0 + \psi$$

若令

$$\angle OPT = \mu$$

这样

$$\angle BPN = \alpha + \psi_0 + \psi + \mu$$

所以

$$\beta = \alpha + \psi_0 + \psi + \mu \quad (c)$$

绘制凸轮廓线都采用反转法, 这种方法是给整个机构加上一个绕凸轮轴心 O 的公共角速度—— ω_1 , 机构各构件间的相对运动不变。这样一来, 凸轮不动, 而从动件一方面随机架以角速度—— ω_1 绕 O 点转动, 另一方面又绕自身的摆动中心 A 作往复摆动, 根据相对运动原理, 摆杆相对凸轮的角速度, 也就是摆杆的瞬心线 S_2 相对凸轮的瞬心线 S_1 的角速度为

$$\omega = -\omega_1 + \omega_2 = -(1 - \psi')\omega_1 \quad (d)$$

式中

$$\omega_1 \text{—— 凸轮的角速度} \quad \omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\omega_2 \text{—— 摆杆的角速度} \quad \omega_2 = \frac{d\psi}{dt}\psi'\omega_1$$

瞬心 P 的移动速度为

$$u = \frac{-a\psi''}{(1 - \psi')\cos \mu}\omega_1 \quad (e)$$

式中

$$\psi'' \text{—— 摆杆的角加速度} \quad \psi'' = \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

把式(a)~(e)代入式(3), 经整理化简后得

$$\rho_1 = \frac{a(1 - \psi')\sin(\psi_0 + \psi)}{\cos \alpha [(1 - \psi')^2 \sin(\psi_0 + \psi) + \psi'(1 - \psi')\cos \alpha \sin(\alpha + \psi_0 + \psi)]} \rightarrow \leftarrow \frac{1}{-\psi'' \cos \alpha \cos^2(\alpha + \psi_0 + \psi)} \quad (4)$$

由于凸轮的实际廓线是理论廓线的等距曲线, 所以 A 型摆动滚子从动件盘形凸轮实际廓线上任意点的曲率半径为

$$\rho = \rho_1 \mp r_T$$

把式(4)代入上式则为

$$\rho = \frac{a(1 - \psi')\sin^2(\psi_0 + \psi)}{\cos \alpha [(1 - \psi')^2 \sin(\psi_0 + \psi) + \psi'(1 - \psi')\cos \alpha \sin(\alpha + \psi_0 + \psi)]} \rightarrow \leftarrow \frac{1}{-\psi'' \cos \alpha \cos(\alpha + \psi_0 + \psi)} \mp r_T \quad (5)$$

式中, 上面的“-”号用于外凸轮廓线, 下面的“+”号用于内凸轮廓线。

用相同的方法可以找到 B, C 和 D 型三种凸轮廓线的曲率半径表达式, 最后把这四种型式的凸轮廓线上任意点曲率半径统一表达成下式

$$\rho = \frac{a(1 - N\psi')\sin^2(\psi_0 - T\psi)}{\cos \alpha [(1 - N\psi')^2 \sin(\psi_0 - T\psi) + N\psi'(1 - N\psi')\cos \alpha \sin(N\alpha + \psi_0 - T\psi)]} \rightarrow \leftarrow \frac{1}{+NT\psi'' \cos \alpha \cos(N\alpha + \psi_0 - T\psi)} \mp r_T \quad (6)$$

式中

N ——转向系数 A 型和 B 型凸轮: $N = 1$ C 型和 D 型凸轮: $N = -1$

T ——型号系数 A型和C型凸轮; $T = -1$ B型和D型凸轮; $T = 1$
压力角 α 的统一公式为

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{l(1 - N\psi) - a \cos(\psi_0 - T\psi)}{Ta \sin(\psi_0 - T\psi)} \quad (7)$$

α 角有正负,不论何种类型的凸轮机构,压力角的正负号由图2所示方向确定

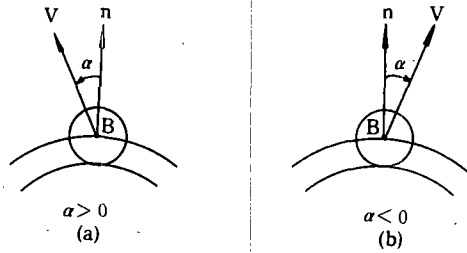


图2 压力角的符号

如果只考虑A型和C型凸轮则凸轮廓线上任意点的曲率半径公式为

$$\rho = \frac{a(1 - N\psi)\sin^2(\psi_0 + \psi)}{\cos\alpha[(1 - N\psi)^2\sin(\psi_0 + \psi) + N\psi(1 - N\psi)\sin(N\alpha + \psi_0 + \psi)]} \mp r_T \quad (8)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{a \cos(\psi_0 + \psi) - l(1 - N\psi)}{a \sin(\psi_0 + \psi)} \quad (9)$$

如果只考虑A型和B型凸轮,则凸轮廓线上任意点的曲率半径公式为

$$\rho = \frac{a(1 - \psi')\sin^2(\psi_0 - T\psi)}{\cos\alpha[(1 - \psi')^2\sin(\psi_0 - T\psi) + \psi'(1 - \psi')\cos\alpha \sin(\alpha + \psi_0 - T\psi)]} \mp r_T \quad (10)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{l(1 - \psi') - a \cos(\psi_0 - T\psi)}{Ta \sin(\psi_0 - T\psi)} \quad (11)$$

2 公式的验证

为了验证上述导出公式的正确性,对比了下述二个求解摆动滚子从动件盘形凸轮实际廓线曲率半径的公式,下面也以A型凸轮为例

比较式之一:

$$\rho = \frac{(x_1'^2 + y_1'^2)^{3/2}}{x_1'y_1' + x_1'y_1'} \mp r_T \quad (12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= -y_1 + \psi' l \sin(\psi_0 + \psi - \varphi) \\ y_1' &= x_1 + \psi' l \cos(\psi_0 + \psi - \varphi) \\ x_1'' &= -x_1 - 2\psi' l \cos(\psi_0 + \psi - \varphi) + \psi'^2 l \cos(\psi_0 + \psi - \varphi) \\ &\quad + \psi'' l \sin(\psi_0 + \psi - \varphi) \\ y_1'' &= -y_1 + 2\psi' l \sin(\psi_0 + \psi - \varphi) - \psi'^2 l \sin(\psi_0 + \psi - \varphi) \\ &\quad + \psi'' l \cos(\psi_0 + \psi - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由上可见,应用这个公式必须先求出凸轮理论廓线的参数方程 $x_1 = x_1(\varphi)$ 和 $y_1 = y_1(\varphi)$ 的表达式,对于 A 型凸轮有:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos \varphi - l \cos(\psi_0 + \psi - \varphi) \\ y_1 &= a \sin \varphi - l \sin(\psi_0 + \psi - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

比较式之二:

$$\rho = \frac{[a^2 + l^2(\psi' - 1)^2 + 2al(\psi' - 1)\cos(\psi_0 + \psi)]^{3/2}}{xa^2 - l^2(\psi' - 1)^3 - al(\psi' - 1)(\psi' - 2)\cos(\psi_0 + \psi) - \psi''alsin(\psi_0 + \psi)} \quad (15)$$

于 r_T

此式的优点是不需预先知道凸轮理论廓线方程而只需知道凸轮机构的基本参数 a, l, r_0, r_T 以及摆杆的运动规律 $\psi = \psi(\varphi)$, 就可求得曲率半径, 但此式没有反映出曲率半径与压力角之间的内在联系, 因此它的应用有局限性。

举例, 计算 A 型外凸轮廓线上每隔 15° 一等分处的曲率半径, 已知机构中心距 $a = 60\text{mm}$, 基圆半径 $r_0 = 25\text{mm}$, 滚子半径 $r_T = 6\text{mm}$, 摆杆长度 $l = 50\text{mm}$, 摆杆的运动规律如下:

凸轮转角	摆杆运动规律
$0^\circ \sim 120^\circ$	按正弦规律摆动 25°
$120^\circ \sim 240^\circ$	休止不动
$240^\circ \sim 360^\circ$	按正弦规律摆回 25°

在 IBM-PC/XT 机上计算所得结果如下表。

表 按式(5), (12)和(15)计算的曲率半径值

凸轮转角 $\varphi(^{\circ})$	曲率半径 $\rho(\text{mm})$		
	式(5)	式(12)	式(15)
0	19	19	19
15	98.27812	98.27829	98.27813
30	122.2421	122.2422	122.2422
45	48.10783	48.10786	48.10786
60	29.04164	29.04164	29.04165
75	20.68056	20.68056	20.68056
90	19.36849	19.36848	19.36849

续表

凸轮转角 $\varphi(^{\circ})$	曲率半径 $\rho(\text{mm})$		
	式(5)	式(12)	式(15)
105	24.89083	24.89082	24.89082
120	39.78928	39.78928	39.78929
135	39.78928	39.78928	39.78928
	略	略	略
225	39.78927	39.78927	39.78928
240	39.78927	39.78927	39.78929
255	25.68835	25.68834	25.68834
270	21.73433	21.73433	21.73432
285	21.83663	21.83663	21.83663
300	24.66073	24.66073	24.66072
315	39.5978	39.59781	39.59783
330	873.7689	873.7872	873.8072
345	170.3295	170.3305	170.3302
360	18.99999	19	18.99999

从上面的计算结果可见三个公式计算出的摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上的曲率半径值几乎完全一样,因此式(5)验证正确。

3 结 论

(1) 由 Euler-Savary 公式可以导出摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上的任意点曲率半径的计算公式,并非不可求导。

(2) 由 Euler-Savary 公式导出的摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上的任意点曲率半径的计算公式比以往应用或导出的公式更有意义和应用价值。它不仅可以先于凸轮廓线方程直接求出凸轮廓线上任意点的曲率半径,还由于找到了曲率半径和压力角之间的内在联系,从而可以把强度条件和传力性能直接结合起来考虑,有利于进一步简化该种凸轮机构的优化设计。

(3) 在应用 Euler-Savary 公式求导摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上任意点曲率半径公式的过程中还找到了一种应用 Hartmann 作图法确定摆动滚子从动件盘形凸轮廓线上的任意点曲率半径的新方法。

(4) 文献[8]中从曲率半径定义出发根据瞬心原理,不通过 Euler-Savary 公式同样导出了与本文 C 型凸轮的导出公式相接近的一个公式,达到了异曲同工的目的。

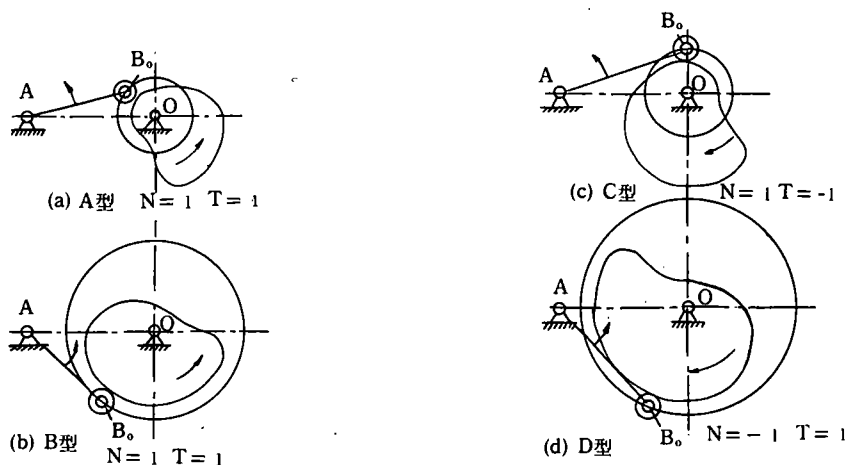
附 录

附 A 摆动滚子从动件盘形凸轮机构的基本型式

根据凸轮与摆杆在推程时的转向和安置方式不同有如附图所示的四种基本型式, 这四种型式的凸轮机构, 它们的基本特征是:

(1) A型和B型凸轮机构的摆杆与凸轮在推程时转向相同; C型和D型则相反。

(2) A型和C型凸轮的基圆半径是理论廓线的最小向径, 滚子中心在推程过程中移离凸轮回转中心, 而在回程时则移近中心; B型和D型凸轮的基圆半径是理论廓线的最大向径, 滚子中心在推程过程中移近凸轮回转中心, 而在回程时则移离中心。



附图 摆动滚子从动件盘形凸轮机构的基本型式

N ——转向系数 T ——型号系数

附 B 凸轮基圆半径的定义

定义: 凸轮(理论)廓线起始点的向径

A型和C型凸轮的基圆半径是凸轮(理论)廓线的最小向径。

B型和D型凸轮的基圆半径是凸轮(理论)廓线的最大向径。

参 考 文 献

- 1 曾中坚. 平面连续接触传动的普遍啮合方程式及其应用. 机械工程学报, 1982
- 2 HUNT K H. KINEMATIC GEOMETRY OF MECHANISMS. Oxford University Press, 1978
- 3 顾连森. 确定摆动滚子从动件盘形凸轮机构最小尺寸的解析法. 东北重型机械学院学报, 1986; 4
- 4 顾连森. 优化设计摆动滚子从动件盘形凸轮机构. 无锡轻工业学院学报, 1987; 2
- 5 顾连森. 设计经编机中共轭凸轮廓线的解析法. 无锡轻工业学院学报, 1990; 3
- 6 伏尔默J著; 郭连声, 柴邦衡译. 凸轮机构. 北京: 机械工业出版社, 1983
- 7 天津大学主编. 机械原理(上册). 人民教育出版社, 1979

8 陈金元. 盘形凸轮机构几何尺寸的计算及计算机辅助设计. 无锡轻工业学院学报, 1986, 2

**The Radius of Curvature at Any Point on the Profile of
A Disk Cam with Oscillating Roller Follower
—One Application of the Euler-Savary Equation**

Gu Liansheng

(Dept. of Mach. Eng.)

Abstract In this paper a new equation for the radius of curvature at any point on the profile of a disk cam with oscillating roller follower is developed by applying the Euler-Savary equation. It solves a difficult problem which has not been answered in researching of meshing theory of planar mechanisms so far in this field. In the equation, not only can the radius of curvature be calculated prior to the cam profile equation, but the relation between the curvature radius and the pressure angle has been set up, which directly connects its strength with the property of transmitting force and makes it easier to optimize the cam design.

Key-words Radius of Curvature; Cam profile; Euler-Savary equation; Speed of progression of the instantaneous center; Pressure angle