第 12 卷 无锡轻工业学院学报 Vol. 12
第 1 期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1993 No. 1

关于窄带随机过程的峰值分布和包络分布

王永安

(机械工程系)

摘要 研究了平稳窄带随机过程的峰值分布和包络分布间的关系，结果表明，仅在某些情况下，它们才有相同的分布函数。

关键词 窄带随机过程；峰值分布；包络线

窄带随机过程的理论，具有广泛的工程背景。它的峰值分布和包络分布问题，由于与系统 可靠性分析和设计直接有关，因而得到广泛深入的研究。文献[1～4]是属于这方面的基础性工作。然而，窄带随机过程峰值分布和包络分布之间的关系，并未引起人们的注意。例如文献[5]在讨论窄带随机过程水平跨越"丛"平均修正问题时，实际上就引入了峰值分布即包络分布的假设。虽然对于平稳高斯窄带随机过程，峰值分布和包络分布相同，但对于一般情形，这是一个尚待探讨的问题。本文仅就平稳窄带随机过程展开讨论。

设 $X(t)$ 为一零均值平稳窄带随机过程，并可表为

$$X(t) = A(t)\cos\Phi(t) \tag{1}$$

式中 $A(t)$，$\Phi(t)$ 为相互独立的随机变量[5]，且 $\Phi(t)$ 可表为

$$\Phi(t) = \omega_0 + \varphi(t) \tag{2}$$

设 $A(t)$，$\Phi(t)$ 相对于 $\omega_0 t$ 而言是缓慢变化的，随机过程 $X(t)$ 的希尔伯特(Hilbert)变换与 $X(t)$ 的关系可近似表为[5]

$$\widetilde{X}(t) = A(t)\sin\Phi(t) = -\dot{X}(t)/\omega_0 \tag{3}$$

式中，$\dot{X}(t)$ 为 $X(t)$ 的一阶均方导数。$X(t)$ 的包络线可表为

$$A(t) = \sqrt{X^2(t) + \widetilde{X}^2(t)} = \sqrt{X^2(t) + (\dot{X}(t)/\omega_0)^2} \tag{4}$$

设 $X(t)$，$\dot{X}(t)$ 的联合概率密度函数为 $f(x,\dot{x})$，则 $X(t)$ 的包络分布函数可表为

$$F_A(a) = \int_0^a f_A(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \iint\limits_{\sqrt{X^2+\dot{X}^2/\omega_0^2}\leqslant a} f(x,\dot{x})\mathrm{d}x,\mathrm{d}\dot{x}\,(0\leqslant a<\infty) \tag{5}$$

在 $X(t)$，$\widetilde{X}(t)$ 平面上引入极坐标，则

收稿日期：1992-06-22

$$X(t)=P(t)\cos\Theta(t) \tag{6}$$

$$\widetilde{X}(t)=P(t)\sin\Theta(t) \tag{7}$$

设 $P(t)$ 与 $\Theta(t)$ 在同一 t 上是统计独立的，其联合密度为 $f_{\rho\theta}(\rho,\theta)=f_\rho(\rho)f_\theta(\theta)$ 于是计及 $\dot{X}(t)=-\omega_0\widetilde{X}(t)$ 得 $f(x,\dot{x})$ 用极坐标表示为

$$f(x,\dot{x})=\frac{f_\rho(\rho)f_\theta(\theta)}{\omega_0\rho} \tag{8}$$

式中，$f_\rho(\rho)$，$f_\theta(\theta)$ 为随机过程 $P(t)$，$\Theta(t)$ 的一阶概率密度函数。并由此可得 $X(t)$ 的包络分布极式为

$$F_A(a)=\iint\limits_{\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} f_\rho(\rho)f_\theta(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^a f_\rho(\rho)\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi} f_\theta(\theta)\mathrm{d}\theta$$

考虑到 $\Theta(t)$ 仅在区间$[0,2\pi]$上均匀分布 $f_\theta(\theta)=\dfrac{1}{2\pi}$，则

$$F_A(a)=\int_0^a f_\rho(\rho)\mathrm{d}\rho \qquad (0\leqslant a<\infty) \tag{9}$$

以上的结果是意料之中的，因为显然 $A(t)$ 即 $P(t)$，目的则在于导出峰值分布的极式，以便与包络分布作比较。

$X(t)$ 的峰值分布函数为[5]

$$\begin{aligned}F_p(a)&=\int_0^a f_p(\zeta)\mathrm{d}\zeta=1-\int_0^\infty f_p(\zeta)\mathrm{d}\zeta=1-\frac{N_x^+(a)}{N_x^+(0)}\\&=1-\frac{\int_0^\infty f(a,\dot{x})\mathrm{d}\dot{x}}{\int_0^\infty f(0,\dot{x})\mathrm{d}\dot{x}}\end{aligned} \tag{10}$$

式中 $N_x^+(a)$，$N_x^+(0)$ 分别表示 X(t) 正斜率跨越水平 x(t)=a 及 x(t)=0 的期望率。

现将 $N_x^+(a)$，$N_x^+(0)$ 表为极式。由 $a=\rho\cos\theta$ 及(7)可得

$$\theta=\cos^{-1}\frac{a}{\rho} \qquad \dot{x}=-\omega_0\sqrt{\rho^2-a^2}$$

并由此得

$$\mathrm{d}\dot{x}=\frac{-\omega_0\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2-a^2}} \qquad f(a,\dot{x})=\frac{f_\rho(\rho)f_\theta\left(\cos^{-1}\dfrac{a}{\rho}\right)}{\omega_0\rho}$$

于是 $N_x^+(a)$，$N_x^+(0)$ 可表为

$$N_x^+(a)=\int_0^\infty f(a,\dot{x})\mathrm{d}\dot{x}=\int_a^\infty \omega_0 f_\rho(\rho)f_\theta\left(\cos^{-1}\frac{a}{\rho}\right)\mathrm{d}\rho \tag{11}$$

$$N_x^+(0)=\int_0^\infty \omega_0 f_\rho(\rho)f_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\rho=\omega_0 f_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{12}$$

将(11)，(12)代入(10)，得峰值分布函数极式为

$$F_p(a)=\frac{f_\theta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\int_a^\infty f_\rho(\rho)f_\theta\left(\cos^{-1}\dfrac{a}{\rho}\right)\mathrm{d}\rho}{f_\theta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} \tag{13}$$

令 $F_A(a)=F_\rho(a)$，即

$$\int_0^a f_\rho(\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{f_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_a^\infty \omega_0 f_\rho(\rho)f_\theta\left(\cos^{-1}\frac{a}{\rho}\right)\mathrm{d}\rho}{f_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right)} \tag{14}$$

化简得

$$\int_a^\infty f_\rho(\rho)\left[f_\theta\left(\cos^{-1}\frac{a}{\rho}\right)-f_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}\rho=0 \tag{15}$$

由(15)可知，由于 $f_\rho(\rho)\neq 0$，若 $\Theta(t)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内满足均匀分布，则(15)成立，即峰值分布等同于包络分布。另外若 $\Theta(t)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内变化平缓，则可以预见峰值分布近似于包络分布。显然，在一般情形下，这两个分布是不同的。

文献[5]指出

$$E[T_1,A]=E[M_1]E[\text{周期}]=\frac{N_x^+(a)}{N_A^+(a)}\cdot\frac{1}{N_x^+(0)} \tag{16}$$

式中 $E[T_1,A]$ 表示包络线 $A(t)$ 在水平 a 以上所占用时间间隔的期望值。对平稳随机过程，由定义显然

$$E[T_1,A]=\frac{1}{N_A^+(0)}\int_a^\infty f_A(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{17}$$

比较(17)，(16)并由(10)得

$$\int_a^\infty f_A(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\frac{N_x^+(a)}{N_x^+(0)}=\int_a^\infty f_\rho(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{18}$$

可见这里引入了峰值分布等于包络分布的结论。本文认为，在推导一个一般关系式时，引用仅对某些特殊情形才成立的关系是欠妥的。应该将(16)改为(17)式。

而式(15)表明，在平稳窄带随机过程 $X(t)$ 与其导数过程 $\dot{X}(t)$ 的联合概率密度函数 $f(x\cdot\dot{x})$ 的极坐标式 $f(x\cdot\dot{x})=f_\rho(\rho)\,f_\theta(\theta)$ 中，若 $f_\theta(\theta)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内为常量，则 $X(t)$ 的峰值分布即包络分布。一般情形下，这两个分布是不同的。

需要说明的是，上述讨论是在以下假定下进行的

$$(1)\quad E\left[\frac{n^+(a)}{n^+(0)}\right]=\frac{E[n^+(a)]}{E[n^+(0)]}=\frac{N^+(a)}{N^+(0)}$$

式中 $n^+(a)=\dot{X}(t)\delta(X(t)-a)U(\dot{X}(t))$，$\delta()$ 是 Dirac δ 函数，$U()$ 是单位阶跃函数。

$$(2)\quad \tilde{X}(t)=-\frac{\dot{X}(t)}{\omega_0}$$

严格地讲，以上两个关系式是近似的。

参考文献

1 Rice S O. Mathematical Analysis of Random Noise. Bell System Tech J, 23

2 Crandall S H;吴家驹，吕玉麟译. 随机振动. 科学出版社，1980

3 Cramer H and Leadbetter M R. Stationary and Related Stochastic Processes. New York: Wiley, 1967

4 Powell A. On the Fatigue Failure of Structures Due to Vibrations Excited by Random Pressure Fields. J Acoust Soc Am, 1958; 30: 1130～1135

5 Nigam N C; 何成慧等译. 随机振动概论. 上海交通大学出版社, 1985

On Distribution of Peaks and Envelope of Narrow—band Random Process

Wang Yongan

(Dept. of Mech. Eng)

Abstract The relation between distributions of peaks and envelope of the stationary narrow—band random process was studied. It has been shown that only in some cases their distribution functions are identical.

Key-words Narrow—band random process; Distribution of peaks; Envelope