第 12 卷 无锡轻工业学院学报 Vol. 12
第 1 期 JOURNAL OF THE WUXI INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY 1993 No. 1

# 矩形公式的推广和改进

费荣昌　　徐宝仁　　蒋炳鑫

(基础课部)

**摘要**　本文推广和改进了定积分近似计算的矩形公式。

**关键词**　积分中值公式;定积分近似计算;矩形公式

## 1 定　　理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,则有 $[a,b]$ 上的数 $\xi$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),$$

这是众所周知的积分中值公式。

如果 $f'(a)\neq 0$,那末积分中值公式中的 $\xi$ 有[1]

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}.$$

据此,以 $\frac{a+b}{2}$ 代替积分中值公式中的 $\xi$,即取

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值,即有定积分近似计算的下述矩形公式。

矩形公式[2]如果 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,则有 $(a,b)$ 内的数 $\xi$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3.$$

为了推广矩形公式,本文先考察当 $b\to a$ 时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1} + \frac{1}{2^{2n-2}(2n-1)!}f^{(2n-2)}(\xi)(b-a)^{2n-1} \tag{1}$$

中 $\xi$ 的变化趋势,有下述定理 1.

收稿日期:1992-09-19

定理 1　如果 $f^{(2n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 存在，在 $x=a$ 处右连续，且 $f^{(2n-1)}(a)\neq 0$，那末(1)中的 $\xi$ 有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}.$$

然后，据定理 1，以 $\frac{a+b}{2}$ 代替(1)中的 $\xi$，即取

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}$$

作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，有下述定理 2.

定理 2　如果 $f^{(2n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则有 $(a,b)$ 内的数 $\xi$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}+\frac{1}{2^{2n}(2n+1)!}f^{(2n)}(\xi)(b-a)^{2n+1}.$$

当 $n=1$ 时即矩形公式。

推论　如果 $f^{(2n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且

$$f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)=0\quad(k=1,2,\cdots,n-1),$$

则有 $(a,b)$ 内的数 $\xi$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2^{2n}(2n+1)!}f^{(2n)}(\xi)(b-a)^{2n+1}.$$

其次，考察 $f^{(i)}(a)=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$ 的情形。

如果 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 存在，在 $x=a$ 处右连续，且 $f^{(i)}(a)=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，那末积分中值公式中的 $\xi$ 有[3,4]

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

据此，以 $a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}$ 代替积分中值公式中的 $\xi$，即取

$$f\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)(b-a)$$

作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，有下述定理 3.

定理 3　如果 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f^{(i)}(a)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，则有 $(a,b)$ 内的数 $\xi$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)(b-a)+\frac{1}{(n+2)!}\left(1-\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+2}.$$

定理 2 和定理 3 推广改进了定积分近似计算的矩形公式。

## 2 定理的证明

定理1的证明,考虑极限

$$\lim_{b\to a}\frac{1}{(b-a)^{2n}}\Big[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}f^{(2k)}\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)^{2k+1}$$
$$-\frac{1}{2^{2n-2}(2n-1)!}f^{(2n-2)}(a)(b-a)^{2n-1}\Big]=A.$$

一方面,由 L'Hospital 法则,

$$A=\frac{1}{(2n)!}\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\Big[f^{(2n-2)}(b)-\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{2n-3}}{2^{2n-2}}f^{(2n-2)}\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$
$$-\frac{1}{2^{2n-2}}f^{(2n-2)}(a)\Big]$$
$$-\frac{1}{2^{2n-1}(2n)!}[1+(1+2)+(1+2+2^2)+\cdots$$
$$+(1+2+2^2+\cdots+2^{2n-4})]f^{(2n-1)}(a)$$
$$=-\frac{1}{2^{2n-1}(2n)!}\{2^{2n-1}-[1+(1+2)+(1+2+2^2)+\cdots$$
$$+(1+2+2^2+\cdots+2^{2n-3})]\}f^{(2n-1)}(a)$$
$$=-\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!}f^{(2n-1)}(a).$$

另一方面,由(1),

$$A=\frac{1}{2^{2n-2}(2n-1)!}\lim_{b\to a}\frac{f^{(2n-2)}(\xi)-f^{(2n-2)}(a)}{\xi-a}\frac{\xi-a}{b-a}$$
$$=\frac{1}{2^{2n-2}(2n-1)!}f^{(2n-1)}(a)\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}.$$

因 $f^{(2n-1)}(a)\neq 0$,有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}.$$

为证定理2,先建立引理1.

**引理1** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}=2^{2n-1}$,

$$\sum_{k=0}^{n-[i/2]-1}(2n-2k-1)(2n-2k-2)\cdots(2n-2k-i)\binom{2n}{2k+1}$$
$$=2n(2n-1)\cdots(2n-i+1)2^{2n-i-1}\quad(i=1,2,\cdots,2n-2),$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2n}{2k+1}}{2n-2k}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

证 记

$$H(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2n-2k-1}=\frac{1}{2}[(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}],$$

有

$$H^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{n-[i/2]-1}(2n-2k-1)(2n-2k-2)\cdots(2n-2k-i)\binom{2n}{2k+1}x^{2n-2k-i-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n-1)\cdots(2n-i+1)[(1+x)^{2n-i}-(-1)^{i}(1-x)^{2n-i}],$$

$$\int_{0}^{x}H(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2n}{2k+1}}{2n-2k}x^{2n-2k}$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)}[(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}-2],$$

在以上各式中令 $x=1$ 即证。

定理 2 的证明，记 $F(x)=\int_{a}^{x}f(x)\mathrm{d}x$，使用 *Taylor* 公式，并采用积分余项，有

$$F(b)=\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i!}F^{(i)}(a)(b-a)^{i}+\frac{1}{(2n)!}\int_{a}^{b}F^{(2n+1)}(x)(b-x)^{2n}\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i!}f^{(i-1)}(a)(b-a)^{i}+\frac{1}{(2n)!}\int_{a}^{b}f^{(2n)}(x)(b-x)^{2n}\mathrm{d}x,$$

而

$$f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sum_{i=0}^{2n-2k-1}\frac{1}{i!}f^{(2k+i)}(a)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{i}$$

$$+\frac{1}{(2n-2k-1)!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}f^{(2n)}(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{2n-2k-1}\mathrm{d}x.$$

于是

$$R_{n}=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}f^{(2k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^{2k+1}$$

$$=\frac{1}{(2n)!}\int_{a}^{b}f^{(2n)}(x)(b-x)^{2n}\mathrm{d}x$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)!(2n-2k-1)!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}f^{(2n)}(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{2n-2k-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(2n)!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}f^{(2n)}g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{(2n)!}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f^{(2n)}(x)(b-x)^{2n}\mathrm{d}x,$$

其中

$$g(x)=(b-x)^{2n}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2n}{2k+1}}{2^{2k}}(b-a)^{2k+1}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{2n-2k-1}.$$

由引理 1，

$$g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(2n-2)}(a)=0,\quad g^{(2n-1)}(x)>0\left(a<x\leqslant\frac{a+b}{2}\right),$$

即有 $g(x)>0\left(a<x\leqslant\frac{a+b}{2}\right)$，于是由积分中值定理，存在 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 内的数 $\xi_1$ 及

$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$内的数$\xi_2$,使

$$R_n=\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{2n}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2^{2n}(2n+1)!}\left[\frac{1}{2}f^{(2n)}(\xi_1)+\frac{1}{2}f^{(2n)}(\xi_2)\right](b-a)^{2n+1}.$$

再用介值定理即证。

为证定理3,先建立引理2.

**引理2** 记

$$h(x)=\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1}-(b-a)\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}-x\right)^n,$$

那末
$$h(x)>0\quad\left(a<x\leqslant a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right).$$

证 显然 $h(a)=0,\quad h\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)>0,$

$$h^{(i)}(a)=(-1)^{i+1}\frac{(n+1)n\cdots(n-i+2)}{n+1}\left[\frac{n-i+1}{(n+1)^{1-i/n}}-1\right](b-a)^{n-i+1}$$
$$(i=1,2,\cdots,n-1),$$

由 Bernoulli 不等式,有

$$(n+1)^{1-\frac{i}{n}}<n-i+1,$$

于是

$$h^{(i)}(a)\begin{cases}>0,i=1,3,\cdots,2\left[\frac{n}{2}\right]-1;\\<0,i=2,4,\cdots,2\left[\frac{n-1}{2}\right],\end{cases}$$

而

$$h^{(i)}\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)=(-1)^i\frac{(n+1)n\cdots(n-i+2)}{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)^{n-i+1}(b-a)^{n-i+1}$$
$$\begin{cases}<0,i=1,3,\cdots,2\left[\frac{n}{2}\right]-1;\\>0,i=2,4,\cdots,2\left[\frac{n-1}{2}\right],\end{cases}$$

$$h^{(n)}(x)=(-1)^n n!(a-x)\begin{cases}<0,n=2,4,\cdots,\\>0,n=3,5,\cdots,\end{cases}\left(a<x\leqslant a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right).$$

当$n$是偶数时,因

$$h^{(n)}(x)<0\left(a<x\leqslant a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right),$$

$$h^{(n-1)}(a)>0,h^{(n-1)}\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)<0,$$

于是 $h^{(n-1)}(x)$ 在 $\left(a,a+\dfrac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$ 内恰有一零点，即 $h^{(n-2)}(x)$ 在 $\left(a,a+\dfrac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$ 内恰有一极大值点，又因

$$h^{(n-2)}(a)<0,h^{(n-2)}\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)>0,$$

于是 $h^{(n-2)}(x)$ 在 $\left(a,a+\dfrac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$ 内恰有一零点，即 $h^{(n-3)}(x)$ 在 $\left(a,a+\dfrac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$ 内恰有一极小值点。如此重复，可知 $h(x)$ 在 $\left(a,a+\dfrac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$ 内恰有一极大值点，又因

$$h(a)=0,h\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)>0,$$

所以

$$h(x)>0\left(a<x\leqslant a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right).$$

当 $n$ 是奇数时，同理可证。

定理 3 的证明，记 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，则 $F^{(i)}(a)=0(i=2,3,\cdots,n)$. 使用 *Taylor* 公式，并采用积分余项，有

$$F(b)=F(a)+F'(a)(b-a)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a)(b-a)^{n+1}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b F^{(n+2)}(x)(b-x)^{n+1}\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n)}(a)(b-a)^{n+1}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n+1}\mathrm{d}x,$$

而

$$f\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)=f(a)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\left(\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)^n$$
$$+\frac{1}{n!}\int_a^{a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}}f^{(n+1)}(x)\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}-x}\right)^n\mathrm{d}x,$$

于是

$$R_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)(b-a)$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n+1}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{b-a}{n!}\int_a^{a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}}f^{(n+1)}(x)\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}-x\right)^n\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n!}\int_a^{a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}} f^{(n+1)}(x)h(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{(n+1)!}\int_{a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}}^{b} f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n+1}\mathrm{d}x,$$

其中

$$h(x)=\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1}-(b-a)\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}-x\right)^n.$$

由引理 2，$h(x)>0\left(a<x\leqslant a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$，于是由积分中值定理，存在 $\left(a,a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$ 内的数 $\xi_1$ 及 $\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}},b\right)$ 内的数 $\xi_2$，使

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_1)\int_a^{a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}} h(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_2)\int_{a+\frac{b-a}{\sqrt[n]{n+1}}}^{b}(b-x)^{n+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(n+2)!}\left(1-\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)[(1-\alpha)f^{(n+1)}(\xi_1)+\alpha f^{(n+1)}(\xi_2)](b-a)^{n+2},\end{aligned}$$

其中

$$\alpha=\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)^{n+2}}{1-\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}.$$

由 Bernoulli 不等式

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}-1}\right)^{n+2}>1+\frac{n+2}{\sqrt[n]{n+1}-1}>1+\frac{n+2}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}-n-2},$$

即有

$$0<\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)^{n+2}<1-\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}},$$

所以 $0<\alpha<1$.

再用介值定理即证。

## 3 举 例

把 $[a,b]$ 等分成 $m$ 个区间

$[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2],\cdots,[x_{m-1},x_m]$ $(x_0=a,x_m=b)$,

记

$$f^{(2k)}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)=y_{i+\frac{1}{2}}^{(2k)},$$

在每个区间上使用定理 2，有近似公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\doteq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}\left(\frac{b-a}{m}\right)^{2k+1}\sum_{i=0}^{m-1}y_{i+\frac{1}{2}}^{(2k)},\qquad(2)$$

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{2^{2n}(2n+1)!m^{2n}} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(2n)}(x)|(b-a)^{2n+1}.$$

例 1 计算 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

在(2)中分别令 $n=1,2$，得近似公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}m}\sum_{i=0}^{m-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2i+1}{2m}\right)^2}, \tag{3}$$

$$|R_1| \leqslant \frac{1}{24\sqrt{2\pi}m^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}m}\sum_{i=0}^{m-1}\left\{1+\frac{1}{24m^2}\left[\left(\frac{2i+1}{2m}\right)^2-1\right]\right\}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2i+1}{2m}\right)^2}. \tag{4}$$

$$|R_2| \leqslant \frac{1}{640\sqrt{2\pi}m^4}.$$

按近似公式(3)(4)计算得表 1.

**表 1 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 的近似值**

| m | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 近似公式(3) | $0.35\pm2\times10^{-2}$ | $0.344\pm4\times10^{-3}$ | $0.342\pm2\times10^{-3}$ | $0.342\pm1\times10^{-3}$ |
| 近似公式(4) | $0.3411\pm6\times10^{-4}$ | $0.34133\pm4\times10^{-5}$ | $0.341342\pm8\times10^{-6}$ | $0.341344\pm2\times10^{-6}$ |

显然(4)优于(3).

当 $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0$ 时，在定理 3 中分别令 $n=2,3,4$，有近似公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq f\left(a+\frac{b-a}{\sqrt{3}}\right)(b-a), \tag{5}$$

$$|R_2| \leqslant \frac{1}{4!}\left(1-\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'''(x)|(b-a)^4;$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq f\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[3]{4}}\right)(b-a), \tag{6}$$

$$|R_3| \leqslant \frac{1}{5!}\left(1-\frac{5}{4\sqrt[3]{4}}\right)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|(b-a)^5;$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq f\left(a+\frac{b-a}{\sqrt[4]{5}}\right)(b-a), \tag{7}$$

$$|R_4| \leqslant \frac{1}{6!}\left(1-\frac{6}{5\sqrt[4]{5}}\right)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(5)}(x)|(b-a)^6.$$

例 2 计算 $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$ $(b>0)$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}},f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0.$$

由矩形公式及(5)(6)(7)分别得近似公式

$$\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}\doteq\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^4}{16}}},\tag{8}$$

$$|R_1|\leqslant\frac{1}{24}\cdot 6(b^6+b^2)b^3;$$

$$\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}\doteq\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^4}{9}}},\tag{9}$$

$$|R_2|\leqslant\frac{1}{4!}\left(1-\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)\cdot 12(2b^9+7b^5+b)b^4;$$

$$\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}\doteq\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^4}{4\sqrt[3]{4}}}},\tag{10}$$

$$|R_3|\leqslant\frac{1}{5!}\left(1-\frac{5}{4\sqrt[3]{4}}\right)\cdot 12(10b^{12}+81b^8+48b^4+1)b^5;$$

$$\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}\doteq\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b^4}{5}}},\tag{11}$$

$$|R_4|\leqslant\frac{1}{6!}\left(1-\frac{6}{5\sqrt[4]{5}}\right)\cdot 12(60b^{15}+930b^{11}+1320b^7+210b^3)b^6.$$

按近似公式(8)(9)(10)(11)计算得表2.

表2 $\int_0^b\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$ 的近似值

| b | 0.1 | 0.3 | 0.5 |
|---|---|---|---|
| 近似公式(8) | $0.100000\pm3\times10^{-6}$ | $0.2999\pm6\times10^{-4}$ | $0.499\pm8\times10^{-3}$ |
| 近似公式(9) | $0.099999\pm1\times10^{-6}$ | $0.2999\pm3\times10^{-4}$ | $0.498\pm5\times10^{-3}$ |
| 近似公式(10) | $0.0999992\pm2\times10^{-7}$ | $0.29981\pm7\times10^{-5}$ | $0.498\pm3\times10^{-3}$ |
| 近似公式(11) | $0.099999\pm7\times10^{-10}$ | $0.29976\pm1\times10^{-5}$ | $0.497\pm2\times10^{-3}$ |

当 $b$ 较小时,显然(9)(10)(11)优于(8).

## 参考文献

1 Jacobson B. On the mean value theorem for integrals, Amer Math Monthly, 1982; 89; 300~301

2 菲赫金哥尔茨 Г M. 微积分学教程(第二卷第一分册). 人民教育出版社, 1956

3 毛慧娟. 关于积分中值定理. 工科数学, 1987; 3: 38~40

4 王书彬. 关于微、积分中值定理的注记. 工科数学 2,3 合刊, 1989; 57~60

5 Poffald E I. The Remainder in Taylor's Formula. Amer Math Monthly, 1989; 97: 205～213

## The Extension and Improvement of Rectangle Formula

Fei Rongchang Xu Baoren Jiang Bingzin

(Dept. of Fund. Coures)

**Abstract** In this paper, we extend and improve the rectangle formula of definite integrals' approximate calculation.

**Key-words** Mean value theorem of integral; Approximate calculation of definite integral; Rectangle formula