

激光散射粒子 $\frac{V}{x^n}$ 约束下的统计特性

朱 拓 (无锡轻工大学数理学科部, 无锡 214036)

倪晓武 (南京理工大学应用物理系, 南京 210014)

张逸新 (无锡轻工大学机械工程系, 无锡 214036)

摘要 将散射粒子间相互作用设想为 $\frac{V}{x^n}$ 型模型下, 求解了散射粒子的速度相关函数和位移二阶矩, 并对 n 的不同取值作了讨论。

关键词 相关函数; 2 阶矩过程; 布朗运动; $\frac{V}{x^n}$ 约束; 统计特性

中图分类号 O540

0 引 言

激光束被散射时散射粒子的统计特性一直是人们注意研究的问题。散射粒子间的多分散性效应和粒子间相互作用问题日益受到人们的重视, 非各态历经效应已被人们研究^[1~3]。

在文献 [1] 中, P. N. Pusey 等人将非各态历经效应作为简谐束缚下的布朗粒子模型, 采用子系综平均方法处理并得到了一些结论; 在文献 [4] 中, 将动态光散射胶体溶液中的散射粒子看成简谐束缚下的布朗粒子, 在过阻尼近似条件下求得结果。本文作者将散射粒子间的束缚设想为 $\frac{V}{x^n}$ 型模型下, 求解了散射粒子的统计特性, 并对所得结论及 n 的不同取值作讨论。

1 $\frac{V}{x^n}$ 约束下散射粒子的动力学方程及速度相关函数

$\frac{V}{x^n}$ 约束下散射粒子的一维动力学方程可写成^[5]

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k\xi(t) \pm \frac{V}{[x(t)]^n} + F_x(t) \quad (1)$$

式 (1) 中: m 为散射粒子的质量; $x(t)$ 为散射粒子 t 时刻位置的 x 分量; $\xi(t)$ 为粒子 t 时刻速度的分量; $F_x(t)$ 是随机力在 x 方向上的分量, 一般认为 $F_x(t)$ 是高斯过程, 其平均值为零; $-k\xi(t)$ 为与速度成正比的阻尼力; $\frac{V}{[x(t)]^n}$ 为作者设定的粒子受约束的表达式; n 为实

数; k, V 视为常数

散射粒子在 t 时刻的位置 $x(t)$ 和 $t = 0$ 时的初位置 $x(0)$ 间有关系

$$x(t) = x(0) + \int_0^t g(f) df,$$

$$\text{即 } \Delta x = \int_0^t g(f) df \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1), 注意到散射粒子在约束力作用下仅在其平衡位置附近运动, 相对位移量 $\left| \frac{\Delta x}{x(0)} \right| \ll 1$ 在一定范围内是成立的, 所以得到

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k g_x(t) \mp \frac{V}{[x(t)]^n} \pm \frac{V \int_0^t g(f) df}{[x(0)]^{n+1}} = F_x(t) \quad (3)$$

在式 (3) 等式两边同乘以 $g_x(0)$ 并求平均, 在初始时刻其位置和速度分布是统计独立的, 且随机力和初始速度统计独立; 设 $\langle [x(0)]^n \rangle \neq 0$ 和 $\langle [x(0)]^{n+1} \rangle \neq 0$ 并视为常数; 注意到 $F_x(t)$ 随机力, 其与 $g_x(0)$ 是统计独立的, 应用 $\langle F_x(t) \rangle = 0$ 的结果; 记 $h(t) = \langle g_x(t) g_x(0) \rangle$. 对式 (3) 进一步求导得

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + U \frac{dh(t)}{dt} + k^2 h(t) = 0 \quad (4)$$

其中 $U = k/m$,

$$k^2 = \frac{\pm V_n}{m \langle [x(0)]^{n+1} \rangle} \quad (n < 0 \text{ 时取负号}).$$

根据麦克斯韦速度分布公式和式 (4) 的结果, 有初始条件

$$h(0) = \langle g_x^2(0) \rangle = k_B T/m \quad (5)$$

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = - \frac{k_B T U}{m} \quad (6)$$

式中 k_B 是玻尔兹曼常数, T 为绝对温标

式 (4), (5), (6) 的求解分 3 种情况, 第一种情况我们称之为过阻尼情况, 即 $U > 2k$ 的情况, 在这种情况下式 (4) 的特征根方程有 2 个实根解,

$$V_1 = \frac{-U + \sqrt{U^2 - 4k^2}}{2} \quad (7a)$$

$$V_2 = \frac{-U - \sqrt{U^2 - 4k^2}}{2} \quad (7b)$$

所以式 (4) 的解为

$$h(t) = A \exp \left[\frac{-U + \sqrt{U^2 - 4k^2}}{2} t \right] + B \exp \left[\frac{-U - \sqrt{U^2 - 4k^2}}{2} t \right] \quad (8a)$$

$$\text{其中 } A = \frac{k_B T [\sqrt{U^2 - 4k^2} - U - 1]}{m \sqrt{U^2 - 4k^2}} \quad (8b)$$

$$B = \frac{k_B T (U + 1)}{m \sqrt{U^2 - 4k^2}} \quad (8c)$$

第二种情况称之为临界阻尼情况, 即 $U = 2k$ 的情况, 在这种情况下式 (4) 的特征根方程有 2 个重根解

$$V_1 = V_2 = -U/2,$$

所以式 (4) 的解为

$$h(t) = \left[\frac{k_B T}{m} - \frac{k_B T U}{2m} t \right] e^{-\frac{U}{2}t} \quad (9)$$

第三种情况称之为振荡阻尼情况, 即 $4k^2 > U^2$ 的情况, 在这种情况下式 (4) 的特征根方程有 2 个复根解

$$V_1 = -\frac{U}{2} + i \frac{\sqrt{4k^2 - U^2}}{2},$$

$$V_2 = -\frac{U}{2} - i \frac{\sqrt{4k^2 - U^2}}{2}.$$

所以式 (4) 的解为

$$h(t) = e^{-\frac{U}{2}t} \left[\frac{k_B T}{m} \cos\left(\frac{\sqrt{4k^2 - U^2}}{2}t\right) - \frac{k_B T U}{2m \sqrt{4k^2 - U^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4k^2 - U^2}}{2}t\right) \right] \quad (10)$$

式 (8a), (9), (10) 为在各种情况下的速度相关函数的解。

2 $\frac{\gamma}{x^n}$ 约束下散射粒子的位移涨落二阶矩

根据式 (8a), (9), (10) 的结果, 进一步求解出 3 种情况下对应的散射粒子的位移涨落二阶矩的 x 分量 $\xi_x^2(t)$. 由文献 [6] 知

$$\xi_x^2(t) = \langle \Delta x^2(t) \rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \xi_x(t_1) \cdot \xi_x(t_2) \rangle =$$

$$2 \int_0^t (t-f) \langle \xi_x(t) \xi_x(0) \rangle df = 2 \int_0^t (t-f) h(f) df,$$

计算得到在过阻尼情况下

$$\xi_x^2(t) = \frac{2A}{V_1} [\exp(V_1 t) - 1] + \frac{2B}{V_2} [\exp(V_2 t) - 1] - 2t \frac{A}{V_1} + \frac{B}{V_2} \quad (11)$$

式 (11) 中的 V_1, V_2, A, B 分别是式 (7a), (7b), (8b), (8c).

在临界阻尼情况下

$$\xi_x^2(t) = \frac{4k_B T t}{mU} \left[1 - \exp\left(-\frac{U}{2}t\right) \right] + \frac{8k_B T}{mU^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{U}{2}t\right) \right] - \frac{4k_B T t}{mU} \quad (12)$$

在振荡阻尼情况下

$$\xi_x^2(t) = \frac{2k_B T}{k^2 m} \left[1 + \frac{a}{b} (\sin bt) e^{at} - (\cos t) e^{at} \right] \quad (13)$$

式 (13) 中 $a = -\frac{U}{2}$, $b = \frac{\sqrt{4k^2 - U^2}}{2}$.

3 结果与讨论

在设定的约束模型下, 具体解得了各种情况下的散射粒子的速度相关函数和位移涨落二阶矩的解析式. 这些结果一方面可直接应用到动态光散射的理论研究中, 为找出散射光电场强度自相关函数的具体理论表达式奠定了必要的基础; 另一方面进一步扩大了动态光散射理论研究结果与实验研究结果进行拟合的对照分析空间, 根据不同的溶液属性和实验曲线可找出相对应的 n 值及该种阻尼下的属性, 这为分析散射粒子间相互作用的具体表达式

提供了一条途径

根据本文的第 2 部分,对临界阻尼 n 有确定之值,对振荡阻尼及过阻尼情况 n 的取值也有一定的范围。

另外, $n = -1$ 为间谐束缚,在文献 [7] 中作者已作了详细讨论; $n = 0$ 为平均场作用,类似于存在均匀外电场的情况,散射粒子在作随机运动的基础上还有一个定向漂移量; $n = 2$ 为万有引力型或库仑力型的相互作用;当然 $n = 1$ 或 n 为分数的情况都是可能的,本文的结果包容了 n 为实数的所有情况。显而易见, $n \rightarrow \infty$ 时只要 $|x| > 1$,即为无约束的布朗运动^[8]。

上述结果对动态光散射及光子在生物组织中的迁移的理论和实验研究有实用意义。

参 考 文 献

- 1 Pusey P N, Megen W V. Dynamic Light Scattering by Non-ergodic Media. *Physica A*, 1989, 157: 705~ 741
- 2 Jacques G H J, Erik T F, Pusey P N. Dynamical Light Scattering by Nonergodic Media: Brownian particles trapped in polyacrylamide gels. *Physics Review A*, 1990, 42(4): 2161~ 2175
- 3 Xue J Z, Pine D J, Milner S T, et al. Nonergodicity and light scattering from polymer gels. *Physics Review A*, 1991, 46(10): 6550~ 6563
- 4 Francis D, Allan B. Dynamics of F-actin and F-actin complexes. *J Mol Biol*, 1974, 89: 273~ 281
- 5 Tsang, Tang H T. Light Scattering and Dynamic of Interaction Brownian Particles. *J Chem Phys*, 1982, 76(8): 3873~ 3876
- 6 Pecora R. Dynamic Light Scattering. New York: Plenum press, 1985. 97
- 7 朱 拓,张逸新,倪晓武等. Brown粒子的速度相关函数和位移二阶矩. *南京理工大学学报*, 1995, 19(5): 413~ 416
- 8 霍裕平,郑久仁. 非平衡态统计理论. 北京: 科学出版社, 1987. 371

Statistical Property of Laser Scattering Particles under Bound of V/x^n

Zhu Tuo (Dept. of Math. and Phy. Sci., Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036)

Ni Xiaowu (School of Science, NUST, Nanjing 210014)

Zhang Yixin (Dept. of Mech., Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036)

Abstract Under physics model of V/x^n bound, statistical property of laser scattering particles is calculated in detail. Discussions are also made for different values of n in this paper.

Key-words coherence function; second order moment processes; brownian motion; bound of V/x^n ; statistical property

(责任编辑: 秦和平)