第17卷 无锡轻工大学学报 Vol. 17
第4期 JOURNAL OF WUXI UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY 1998 No. 4

电大尺寸电磁场问题的广义离散卷积法

薄亚明

(无锡轻工大学信息与控制工程学院,无锡 214036)

摘要 利用正交变换及其快速算法,以迭代算子的 Frobenius范数最小为准则,推广了求解电大尺寸电磁场问题的离散卷积法和修正离散卷积法,提出了一类迭代法,即广义离散卷积法。具体给出了采用快速 Hadamard变换的二进卷积迭代法,以及基于二进卷积、适用于对称结构的分区直接解法。数值结果验证了算法的有效性。

关键词 电磁波;电磁散射;迭代法;矩量法

分类号 TN011

0 引 言

随着电磁学领域所研究的电磁波频段日渐提高,分析电大尺寸结构的电磁辐射与散射的问题日显重要。对电大尺寸电磁场问题的分析方法可分为解析方法、高频近似法、数值解法和各种混合法。其中解析法仅适用于物体表面与正交坐标面重合的简单结构,而高频近似法,如几何光学法、物理光学法、几何绕射理论等,通常用于物体尺寸甚大于波长的情形,不宜用于具有几何形状突变的物体以及由大量电小尺寸物体组成的大结构。以矩量法(MoM)[1]为代表的数值解法理论上不受物体几何结构的限制且可以达到任意精度,但实际上受限于计算机的计算速度和内存容量,其精度亦受舍入误差的影响。结合高频近似法和数值法的混合方法可以在一定程度上避免两者的缺陷。但将两种方法结合的途径,以及所需的计算量和存储量,仍是值得研究的问题。

近年来,实际中的物体尺寸及其媒质构成分别呈大型化和复杂化的趋势。数值解法在普适性方面具有优势。因此,深入研究适用于大型问题的数值解法是当前计算电磁学的一个研究热点。在现有数值方法中,迭代法占有重要地位。这是因为迭代法与传统数值解法(如MoM)在计算量和存储量方面均具有其独特的优点,同时,利用迭代过程又很容易与其他方法(如高频射线法)结合而构成混合法。曾经提出过的具有代表性的迭代法有谱域迭代法(SIT)[2]、共轭梯度法(CGM)[3]、离散卷积法(DCM)[4]、区域分解法(DDM)[5]等。其中对解电磁场积分方程 DDM的研究尚属起步阶段,这与 DDM较适合于解封闭区域上的微分方程有关。SIT则已被证实为不收敛的算法[6],应用已不多见。CGM因为可以利用电磁场积分

国家教委博士点专项科研基金项目
收稿日期: 1998-04-27
第一作者: 薄亚明,男,1963年9月生,工学博士,副教授

方程中的卷积算子,引入快速 Fourier变换(FFT),构成各种类型的 CG-FFT算法,从而得到了广泛的应用[7~10]。但 CGM属于非定常迭代法或半迭代法,计算过程中共轭向量的正交性损失将导致其固有的数值不稳定性。DCM则属于定常迭代法,对迭代解的误差具有自修正性,且也采用了 FFT使计算量和存储量降阶,属于一种快速解法,但其收敛性存在问题[11]。最初 DCM算法并未给出其迭代算子的表达式,文献[11]给出了 DCM算法的公式表示,并提出了修正 DCM(MDCM)。然而,DCM和 MDCM实质上仅仅是一类定常迭代算法中的一种。

本文在 DCM和 MDCM的基础上,提出了用正交变换及其快速解法,通过卷积运算构造定常迭代法的广义离散卷积法(GDCM),通过使迭代矩阵 Frobenius范数(F-范数)最小化,保证迭代过程的收敛性,并得到了数值算例的验证。文中简述了对应于循环卷积与 FFT的 MDCM,提出了用二进卷积与快速 Hadamard变换(FHT)实现的二进卷积迭代算法。特别指出了通过对积分方程的离散单元的适当编号,将所得广义阻抗矩阵实施分块的二进变换,可以实现对大型问题的直接求解,而实际计算量仅为传统算法的数十分之一。二进卷积迭代法的存储量和计算量分别为 $O(N)$和 $O(N^2\log_2N)$,低于常规算法的 $O(N^3)$.

本文提出的 GDCM可适用于电大尺寸电磁场问题,尤其是有限周期结构和对称结构的电磁场问题。

1　广义离散卷积法

众所周知,开域的电磁场辐射与散射问题通常用积分方程求解。以电场积分方程为例,其形式可简写为:

$$\int_S \overset{\Rightarrow}{G}(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}s=\vec{E}^{inc}(\vec{r}),\tag{1}$$

式中积分核 $\overset{\Rightarrow}{G}$为并矢 Green函数,具有对称性。$\vec{J}$和$\vec{E}^{inc}$分别为待求的未知等效源函数和已知入射场函数。S为物体表面,$\vec{r}$和$\vec{r}\,'$则分别代表场点和源点的空间坐标。用分域基函数和权函数对方程(1)均匀离散,可得矩阵-向量方程:

$$\boldsymbol{Za}=\boldsymbol{b}\tag{2}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{Z}$为广义阻抗矩阵,向量 $\boldsymbol{a}$为未知源的展开系数组成的列向量,$\boldsymbol{b}$为由入射场函数与权函数作内积所得的已知向量。由于积分核的对称性,显然,只要物体的结构具有一定对称性,或可将物体(群)扩展为具有对称性的结构,通过对离散单元的合适编号,矩阵 $\boldsymbol{Z}$的元素也可具有相应的对称性,其实际独立元素的阶为 $O(N)$. 矩阵 $\boldsymbol{Z}$与向量的积可以用 $O(N\log_2N)$的计算量求得[5]。

矩阵-向量方程的一步定常迭代解法可写成以下形式:

$$\boldsymbol{a}_{k+1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{b}\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{Z}'$可看作矩阵 $\boldsymbol{Z}$的近似逆,为尽量保证收敛性,它必须在某种“最接近于”$\boldsymbol{Z}^{-1}$的尺度下给出。同时为了减少计算量和存储量,(3)式右端的矩阵-向量积必须存在快速计算方法,矩阵 $\boldsymbol{Z}'$所需的存储空间还要低于 $O(N^2)$.

设有某种意义的卷积* 及其对应的某种正交线性变换 $\boldsymbol{T}$满足下列条件:

条件1)　对给定的3个长度为 N的序列 u, v和 w以及它们的变换

$$\tilde{u}=\boldsymbol{T}\{u\},\tag{4}$$

$$\tilde{v} = \boldsymbol{T}\{v\}, \tag{5}$$
$$\tilde{w} = \boldsymbol{T}\{w\}. \tag{6}$$

当卷积

$$w = u * v, \tag{7}$$

成立时,在变换域的乘积也成立:

$$\tilde{w} = \tilde{u}\tilde{v}. \tag{8}$$

条件 2) 用 $\boldsymbol{T}$ 及其逆变换 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 对序列所作的变换存在快速算法。

不难看出,以上第一个条件可使(7)式写成

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{u} \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是分别对应与序列 u、v 和 w 的列向量。$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 则是分别对应于 u 和 v 的矩阵,其形式取决于变换 $\boldsymbol{T}$,都具有 N 个独立元素。令矩阵 $\boldsymbol{Z}'$ 具有和以上 $\boldsymbol{U}$ 或 $\boldsymbol{V}$ 相同的形式(N 个独立元素),且在 F-范数意义下最接近于 $\boldsymbol{Z}^{-1}$,即

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\|_F^2 = \min, \tag{10}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 F-范数定义为

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} |a_{ji}|^2}, \tag{11}$$

a_{ji} 为 $\boldsymbol{A}$ 的元素。将 $\boldsymbol{Z}$ 用其列向量写成

$$\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_N], \tag{12}$$

利用(9)式的性质,(10)式左端可以写成

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{e}_i^T - \boldsymbol{z}'^{*}\boldsymbol{Z}_i^{*})(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{z}'), \tag{13}$$

式中上标 T 和 $*$ 分别表示转置和共轭转置;$\boldsymbol{e}_i$ 为 N 维向量空间中的第 i 个坐标向量;$\boldsymbol{z}'$ 为由 $\boldsymbol{Z}'$ 的 N 个独立元素组成的向量;$\boldsymbol{Z}_i$ 为由(12)式中列向量 $\boldsymbol{z}_i$ 的 N 个元素组成的矩阵,其组成方式同样由变换 $\boldsymbol{T}$ 决定。于是利用(13)式,即可得(10)式中矩阵 $\boldsymbol{Z}'$ 的 N 个独立元素组成的向量:

$$\boldsymbol{z}' = \left[\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_i^{*}\boldsymbol{Z}_i\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Z}_i^{*}\boldsymbol{e}_i\right]. \tag{14}$$

由此可得到矩阵 $\boldsymbol{Z}'$ 和相关的迭代公式(3).

显然,根据条件 1),所有 $\boldsymbol{Z}_i$ 及其共轭转置矩阵具有相同的形式,它们的和、积与逆仍然具有同样的形式。因此,若所选正交变换满足条件 2),用(14)式计算 $\boldsymbol{Z}'$ 的元素所需计算的矩阵-向量积、矩阵求积、矩阵求逆,都可用快速算法求解,构成迭代过程的矩阵便可快速求得。由于矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的独立元素是 $O(N)$ 阶的,求解过程中所需的存储量也为 $O(N)$. 结合矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 与向量之积的快速算法,迭代式(3)的右端也可以实现快速计算,所需要的存储量为 $O(N)$. 以上原理并未规定所用的卷积和变换,故称为广义离散卷积法(GDCM).

当卷积运算选为循环卷积,正交变换为离散 Fourier 变换时,则对应的快速算法为 FFT,$\boldsymbol{Z}'$ 和 $\boldsymbol{Z}_i$ 等矩阵为循环矩阵。只要在将积分方程(1)作均匀离散时按顺序编号,使 $\boldsymbol{Z}$ 成为与循环矩阵部分相似的 Toeplitz 矩阵,就可构成 MDCM[11]. 但是,满足以上两个条件的卷积和变换并非只有一种。

2　二进卷积迭代算法

Walsh函数理论中的二进卷积和 Hadamard变换[12],也可构成一组满足条件 1) 的卷积和变换,而 FHT则是其快速算法。利用 GDCM便可直接得到对应的迭代算法。需要指出的是,二进卷积通常需要 $N=2^m$ (m 为正整数),在卷积的矩阵表达式中,$\boldsymbol{U}$和 $\boldsymbol{V}$的形式为分块对称矩阵:

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

且其子矩阵 $\boldsymbol{D}$和 $\boldsymbol{C}$也是分块对称矩阵,依次类推。亦即该矩阵实际上是 m 重对称阵,只有 N 个独立元素,计算中 $\boldsymbol{Z}'$和 $\boldsymbol{Z}_i$ 需要取该种形式。为了使 (10)式的 F-范数尽可能小,应该通过对离散单元编号,使广义阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 具有与上述相近的形式。以矩形导电薄板为例,使用循环卷积和二进卷积时, 4×4个数值离散单元的编号应分别如图 1(a)和 (b)所示,前者得到两重 Toeplitz矩阵,后者得到两重对称矩阵,这两个矩阵为行列交换的关系。离散单元数更大的情形可以类推。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(a) 使用循环卷积

1	2	5	6
3	4	7	8
9	10	13	14
11	12	15	16

(b) 使用二进卷积

图 1　导电薄板离散单元编号示例

二进卷积法的计算步骤为:

1) 利用图 1(b)所示的方法,采用分域基函数和权函数对方程 (1)作离散化,得矩阵-向量方程 (2),其广义阻抗矩阵具有多重对称的特点。

2) 利用 (14)式计算向量 z',根据二进卷积的关系给出矩阵 $\boldsymbol{Z}'$.

3) 利用 (3)式迭代计算未知源的展开系数向量。初始解通常取零,迭代终止条件为方程 (2)的相对余量小于某一给定值,对于求解雷达散射截面 (RCS),该给定值通常取 10^{-4},能保证工程应用所需的精度。

4) 利用求得的等效源 $\vec{J}$计算其它参数。

可以看出,步骤 2)所需的计算量为 $O(N^2\log_2 N)$,步骤 3)中每步迭代的计算量为 $O(N^2\log_2 N)$,该步骤总的计算量便取决于迭代次数。以下数值结果验证了用二进卷积法的有效性。但与 MDCM不同的是,本文利用二进卷积的思想不但可以得到迭代算法,而且可以导出对于对称结构的新型直接解法,其计算量虽不降阶,但仅为传统数值解法的十几分之一到几十分之一,适合于求解中等规模而精度要求较高的问题。

3　对称结构的直接求解法

现以图 2所示的二维对称结构为例,给出数值解的直接求解方法。对图 2的结构,方程 (1)中的 S即为物体 1至物体 4的全部表面。不难知道,只要在分域离散过程中使用对称编号,所得方程 (2)即具有如下分块形式:

图 2　对称结构示意图

$$\boldsymbol{Za}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \end{bmatrix}=\boldsymbol{b}\ . \tag{16}$$

令
$$H=\begin{bmatrix} I & I & I & I \\ -I & I & -I & I \\ -I & -I & I & I \\ I & -I & -I & I \end{bmatrix}, \tag{17}$$
$$b'=Hb, \tag{18}$$
$$a'=H^T a, \tag{19}$$
则(16)式可写为
$$Ea'=b', \tag{20}$$
式中
$$E=4\begin{bmatrix} A+B+C+D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-B+C-D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A+B-C-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A-B-C+D \end{bmatrix}, \tag{21}$$
为块对角阵。于是,方程(16)就可化为4个规模为原来1/4的去耦方程。由于直接解法的计算量为 $O(N^3)$,故解这4个方程的计算量为直接解方程(16)的1/16。易知,对三维对称结构作类似处理,计算量将降为直接求解的1/64。这比较适合于求解有限周期结构一类的电磁场问题,如频率选择表面的频率响应特性等。

4 数值算例

本节利用细直导线一维有限阵列的散射问题,给出了利用二进卷积迭代算法的计算实例,据此讨论了该算法在此典型应用场合的收敛特性。还比较了节3的分区直接解法与矩量法所需的计算时间。

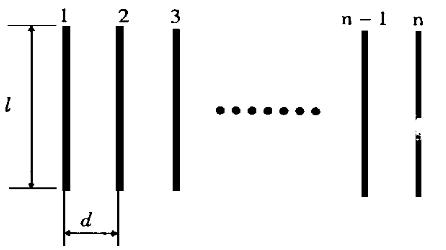

图3 细直导线阵列

在图3所示的细直导线阵列中,d 为导线间距,l 为导线长度,n 为导线数目。文中算例取实用中最常见的 $d=0.5\lambda$,导线长度则取 $l=1\lambda$ 和 $l=2\lambda$ 两种情况,式中 λ 为入射波波长。入射波为正投射,电场平行于导线轴向。对细导线的 Pocklington积分方程用分段正弦基函数和 Galerkin法作离散。每根导线分段数为 N_e,对 $l=1\lambda$ 和 $l=2\lambda$,N_e 分别取8和16。导线数目 n 取2的方幂。

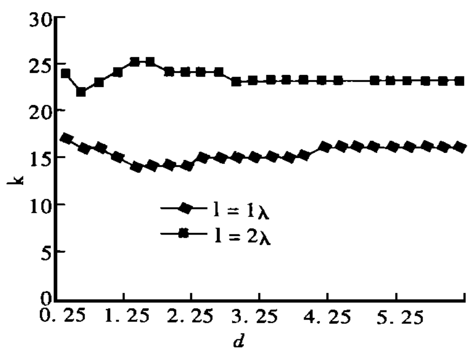

图4 迭代次数与导线间距的关系

图4给出了二进卷积迭代算法的迭代次数与导线间距的关系。曲线表明当导线间距大于0.5个波长时,迭代次数对间距的变化并不敏感。而导线间距小于0.5个波长时,迭代次数随间距的减小而有所增加。这与间距较小时导线间的电磁耦合较强有关。但导线阵一类的有限周期结构在用作频率选择表面时,间距通常在半个波长左右,故这一现象对该算法的实际使用影响不大。

图 5为迭代次数与导线数目的关系 ,图中 $m = \log_2 n$为导线数目的对数表示。从图中可见本文二进卷积算法的迭代次数几乎与导线数目无关 ,亦即与问题的规模无关。这表明在分析此类问题时 ,迭代计算量为 $O(N\log_2 N)$. 在未知量很大时 ,算法的总计算量主要由求解 Z' 的过程决定 ,为 $O(N^2\log_2 N)$. 这一特性使本方法较适合于求解由大量单元组成的有限周期结构。图 6比较了迭代算法与 MoM 对不同导线数目的计算时间。用常规矩量法求解所需计算时间的增长速率明显大于本文中提出的迭代法。

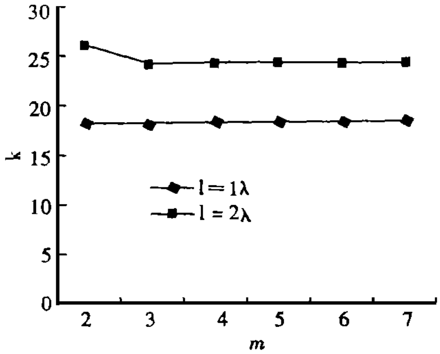

图 5 迭代次数与导线数目的关系

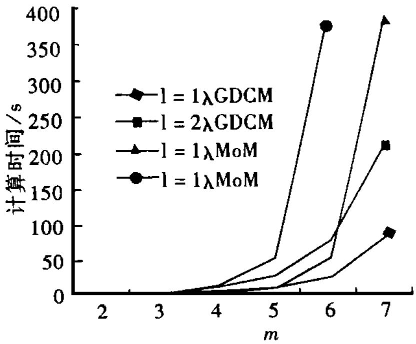

图 6 计算时间与问题规模的关系

在未知量较大的情况下 ,分区直接解法和矩量法求解所需的计算时间列于表 1. 在 Pentium 133微机上 ,用 MoM 求解 1024个未知量需要 6 min多 ,而同样规模的问题用对称结构的分区直接解法仅需 30 s多。

表 1 对称结构直接分区直接解法和矩量法时间的比较

	矩量法的计算时间 /s	分区解法的计算时间 /s
$l = 1\lambda,\ n = 128,\ N_e = 8$	374	35
$l = 2\lambda,\ n = 64,\ N_e = 16$	368	36

5 结 论

本文中提出的广义离散卷积法对应了一类迭代算法。只要存在符合节 1中两个条件的线性正交变换及其快速算法 ,就可构造一种迭代算法加以研究 ,以根据其数值特点 ,为实际分析选用。本文中具体给出了利用二进卷积 FHT实现的二进卷积迭代算法及其数值试验算例。算例表明 ,这一算法具有与 MDCM 类似的特性 (图 4~ 6)[11] ,克服了 DCM 对有些情形发散的不足 ,也没有 DCM 迭代次数与导线单元数目的相关性。但需要指出的是 , MDCM 所采用的是含复数运算的 FFT,而二进卷积迭代法采用只有加减运算的 FHT,计算量更少。另外 ,对于对称结构的问题 ,通过适当编号 ,利用分块二进变换 ,可以将计算问题的规模缩小后直接求解 ,这是 MDCM 通常所不具备的特性。

参 考 文 献

1 Harrington R F. 计算电磁场的矩量法. 王尔杰 ,肖良勇 ,林炽森等译. 北京: 国防工业出版社 , 1981

2 Tsao C H, Mittra R. A spectral iterative approach for analyzing scattering from frequency selective surface. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1982, 30(2): 303~ 308

3 Sarkar T K. The application of the conjugate gradient method for the solution of operator equation arising in electromagnetic scattering from wire antennas. Radio Science, 1984, 19(5): 1156~1172.

4 Nyo H L, Adams T, Harrington R F. The discrete convolution method for electromagnetic problems. Electrom, 1985, 5(2~3): 950~955

5 薄亚明. 电大尺寸电磁散射问题迭代解法的研究. [博士学位论文]. 南京: 东南大学, 1992

6 Van den Berg P M. Iterative solution based on the minimization of the error in field problems. Electrom, 1985, 5(2~3): 237~262

7 Barkeshli K, Volakis J L. On the implementation of the conjugate gradient fast Fourier transform method for scattering by planar plates. IEEE AP Magz Apr, 1990. 20~26

8 Catedra M F, Gago E, Nuno L. A numerical scheme to obtain the RCS of three-dimensional bodies of resonant size using the conjugate gradient method and fast Fourier transform. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1989, 37(5): 528~537

9 Jegannathan S, Ramamurthi B. Scattering from a circular dielectric cylindrical shell: a fast algorithm. Elect Lett, 1990. 198~202

10 Bo Y M, Zhang W X. A new algorithm of scattering from a finite periodic surface: conjugate gradient-circular convolution (CG-CC) method. IEEE AP-S Antennas & Propagation, London Canada, 1991. 300~303

11 薄亚明, 章文勋. 电大尺寸物体电磁散射问题的修正离散卷积法. 应用科学学报, 1993, 10(4): 283~289

12 郑维行, 苏维宜. 沃尔什函数理论与应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1983

The Generalized Discrete Convolution Method for Electromagnetic Problems of Electrically Large Structures

Bo Yaming

(Wuxi University of Light Industry, Wuxi, 214036)

Abstract By means of the orthogonal transform and its fast algorithm, the generalized discrete convolution method is presented in this paper under the condition of minimal Frobenius norm of the iterative operator. By using fast Hadamard transform, the binary convolution method is proposed. The direct solution based on binary convolution and domain decomposition for symmetric structures is also given. The numerical results verify the validity of the algorithms.

Key words electromagnetic wave; electromagnetic scattering; iterative method; moment method.

(责任编辑: 秦和平)