第 20 卷第 2 期
2001 年 3 月

无锡轻工大学学报
Journal of Wuxi University of Light Industry

Vol. 20, No. 2
Mar., 2001

文章编号：1009-038X(2001)02-0196-03

# 薄板流问题广义解的渐近性质

孙应飞， 须文波
（无锡轻工大学信息与控制工程学院，江苏无锡 214036）

**摘　要**：讨论了非牛顿粘性流体薄板流问题广义解的渐近性质，利用泛函分析的方法证明了薄板流问题广义解的一个渐近性定理.

**关键词**：非牛顿粘性；薄板流；渐近性
**中图分类号**：O 175　　　　**文献标识码**：A

# The Asymptotic Property on Generalized Solution of Thin-plate Flow Problem

SUN Ying-fei， XU Wen-bo
(School of Information and Control Engineering, Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036, China)

**Abstract**: In the paper, the asymptotic property on generalized solution of thin-plate flow problem was investigated. By using the functional analysis method, an asymptotic property theorem for generalized solution was proved.

**Key words**: non-Newtonian viscosity; thin-plate flow; asymptotic property

聚合物加工过程中的研究对象通常是聚合物流体.聚合物流体是一种典型的非牛顿粘性流体.尽管目前有关非牛顿粘性流体的研究有许多[1]，但对于具体加工过程中所遇到的特殊情形未能得到一种通用成熟的数学模型.在研究聚合物注塑成型过程中，文献[2]建立了非牛顿粘性流体薄板流数学模型，它由一非线性偏微分方程组描述.作者已解决了该方程组广义解的适定性及周期解的存在性问题[3]，但对能反映非牛顿粘性流体运动趋势的广义解的渐近性质并未涉及.本文讨论非牛顿粘性流体薄板流问题广义解的渐近性质，利用泛函分析的方法证明了薄板流问题广义解的一个渐近性定理.

## 1　主要结果

讨论非牛顿粘性流体薄板流问题广义解的渐近性质.非牛顿粘性流体薄板流问题由以下非线性偏微分方程组的第一初边值问题描述[1,2]：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}[K(\mathrm{II}(u), \mathrm{I}(u))d_{ij}(u)] - \\ \qquad \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - u_i F(\mathrm{I}(u)) + f_i & \text{in } Q_T \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 & \text{in } Q_T \\ u|_{\Sigma_T} = 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期：2000-06-10；修订日期：2000-12-21.
作者简介：孙应飞(1964-)，男，浙江绍兴人，理学博士，生物信息博士后研究人员.

万方数据

式中 $\Omega$ 是 $R^2$ 中的有界开区域，$\partial\Omega$ 是其边界，$T$ 是正常数，$x_i(i=1,2)$ 是点 $x$ 的笛卡儿坐标分量；$u_i=u_i(x_1,x_2,t)(i=1,2)$ 是薄板流速度 $u$ 的分量，$p$ 是其压力；$\sum_T=\partial\Omega\times(0,T)$，$Q_T=\Omega\times(0,T)$，$f_i=f_i(x,t)=f_i(x_1,x_2,t)(i=1,2)$ 是外力的 $f$ 的分量，它们是定义在 $Q_T$ 上的已知函数；$u_0$ 是已知的初始速度；$K(\cdot,\cdot)$ 和 $F(\cdot,\cdot)$ 分别是定义在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 和 $[0,+\infty)$ 上取正值的已知函数. 另外，$d_{ij}(u)=(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)/2$，$\mathrm{II}(u)=[(\sum_{i,j=1}^{2}d_{ij}^2(u))/2]^{\frac{1}{2}}$，而 $I(u)=(u_1^2+u_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

以 $H^1(\Omega)$ 记通常的 Sobolev 空间，而 $D(\Omega)$ 是支集属于 $\Omega$ 的无穷次可微函数的集合，取

$$V=\overline{\{u\in(D(\Omega))^2;\mathrm{div}\ u=0\}}^{(H^1(\Omega))^2}$$

$$H=\overline{\{u\in(D(\Omega))^2;\mathrm{div}\ u=0\}}^{(L^2(\Omega))^2}$$

在 $V$，$H$ 中分别定义范数

$$\|u\|=\left[\int_\Omega\sum_{j=1}^{2}\left(\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_2}\right|^2\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\quad\forall u=(u_1,u_2)\in V$$

$$|u|=\left[\int_\Omega(u_1^2+u_2^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\quad\forall u=(u_1,u_2)\in H$$

$V$ 和 $H$ 是 Hilbert 空间，令 $V^*$ 是 $V$ 的对偶空间，$H^*$ 是 $H$ 的对偶空间，则有 $H^*=H$ 和 $V\subset H\subset V^*$，并且两个嵌入都是紧的. 以 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $V^*$ 和 $V$ 之间的对偶积和 $H$ 中与范数 $|\cdot|$ 相应的内积，而 $V^*$ 中于 $\|\cdot\|$ 相应的范数记为 $\|\cdot\|_*$. 以下给出两个定义.

**定义 1**　$A(\cdot,\cdot)$，$E(\cdot,\cdot)$ 和 $B(\cdot,\cdot)$ 和分别是由等式

$$(A(w,u),v)=\frac{1}{2}\int_\Omega K(\mathrm{II}(u),\mathrm{I}(w))d_{ij}(u)d_{ij}(v)\mathrm{d}x\quad\forall u,v,w\in V,\quad(2)$$

$$(E(w,u),v)=\int_\Omega u_iF(\mathrm{I}(w))v_i\,\mathrm{d}x\quad\forall u,v,w\in V,\quad(3)$$

$$(B(w,u),v)=\int_\Omega w_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}v_i\,\mathrm{d}x\quad\forall u,v,w\in V,\quad(4)$$

确定的定义在 $V\times V$ 上，于 $V^*$ 中取值的算子.

**定义 2**　令 $f\in L^2(0,T;V^*)$，$u_0\in H$，如果一个函数 $u\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\in L^2(0,T;V^*)$ 是初值问题：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+A(u,u)+B(u,u)+E(u,u)=f\\ \qquad a.e.\ t\in(0,T)\\ u(0)=u_0\end{cases}\quad(5)$$

的解，则称它是式(1)的广义解.

在满足以下条件 K1、K2、K3、F1、F2 的情况下，关于流体薄板流问题广义解的适定性已经得到解决[2,3].

K1)：$K(\cdot,\cdot)\in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$，且存在正数 $k_1$，$k_2$ 使

$$k_1\leqslant K(\mathrm{II},\mathrm{I})\leqslant k_2\qquad\forall\ \mathrm{I},\mathrm{II}\geqslant 0_3$$

K2) 存在 $\alpha\in(0,k_1)$ 使

$$[K(\mathrm{II}_2,\mathrm{I})\mathrm{II}_2-K(\mathrm{II}_1,\mathrm{I})\mathrm{II}_1](\mathrm{II}_2-\mathrm{II}_1)\geqslant\alpha(\mathrm{II}_2-\mathrm{II}_1)^2\quad\forall I,\mathrm{II}_1,\mathrm{II}_2\geqslant 0$$

K3) 存在正常数 $C_K$ 使

$$[K(\mathrm{II},\mathrm{I}(w))-K(\mathrm{II},\mathrm{I}(\overline{w}))]\mathrm{II}\leqslant C_K\mathrm{I}(w-\overline{w})\quad\forall\ \mathrm{II}\geqslant 0,w,\overline{w}\in R^2$$

F1)：$F(\cdot)\in C[0,+\infty)$，且存在正常数 $f_1$，$f_2$ 使

$$f_1\leqslant F(\mathrm{I})\leqslant f_2\qquad\forall\ \mathrm{I}\geqslant 0$$

F2)：$[u_iF(\mathrm{I}(u))-v_iF(\mathrm{I}(v))](u_i-v_i)\geqslant 0\quad\forall\ u,v\in R^2$

主要结果是：

**定理 1**　设 $\Omega\subset R^2$ 是有界开集，其边界 $\partial\Omega$ 充分光滑. 假设函数 $K(\cdot,\cdot)$，$F(\cdot,\cdot)$ 满足条件 K1、K2、K3、F1、F2，$f$ 和 $u_0$ 满足条件

$$\begin{cases}f\in L^2(0,T;V)\\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\in L^2(0,T;V^*)\\ A(u_0,u_0),B(u_0,u_0),E(u_0,u_0)\in H\\ u_0\in V,f_{(0)}\in H\end{cases}\quad(6)$$

如果

$$\int_0^\infty(|f|+|f_t|)\mathrm{d}t<\infty$$

则非线性偏微分方程组(1)的广义解 $u(x_1,x_2,t)$ 当 $t\to+\infty$ 时趋于零. 也就是说，当 $t\to+\infty$ 时，积分 $\int_\Omega\|u\|^2\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\Omega_1}\|u\|^2\,\mathrm{d}x$ 趋于零. 其中 $\Omega_1$ 是 $\Omega$ 的任意有限部分.

## 2　主要结果的证明

为了证明定理 1，先证明两个引理，记：

$$\begin{cases}\varphi(t)=\|u_x(x,t)\|_{2,\Omega'}\\ \psi(t)=\|u_t(x,t)\|_{2,\Omega'}\\ F(t)=\|u_{tx}(x,t)\|_{2,\Omega'}\end{cases}\quad(7)$$

万方数据

**引理1** 若对于 $t\in[0,T]$，$u$ 是方程组(1)的广义解，那么

$$|u(x,t)|\leqslant|u_0|+\int_0^t|f(x,t)|\mathrm{d}t,\qquad(8)$$

$$\frac{1}{2}|u(x,t)|^2+c\int_0^t\|u\|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}|u_0|+(|u_0|+\int_0^t|f|\mathrm{d}t)\int_0^t|f|\mathrm{d}t\qquad(9)$$

其中 $c$ 是一正常数.

**引理2** 若对于 $t\in[0,T]$，$u$ 是方程组(1)的广义解，那么 $\psi(t)\leqslant C_1$，$\int_0^t F^2(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant C_2$，其中 $C_1$，$C_2$ 是正常数.

对引理(1)的结论，只要注意到以下不等式[3]即可得到证明.

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2+c\|u\|^2\leqslant\langle f,u\rangle\qquad(10)$$

另外，在方程组(1)中的第一个方程两边对 $t$ 求导数，然后两边同乘以 $u_t$，利用分部积分，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|^2+c|u_{t,x}|^2+\int_\Omega u_{tj}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_{ti}\mathrm{d}x\leqslant\langle f_t,u_t\rangle\qquad(11)$$

利用不等式

$$\|u\|_{4,\Omega}^4\leqslant4\|u\|_{2,\Omega}^2\cdot\|u_{x_1}\|_{2,\Omega}\cdot\|u_{x_2}\|_{2,\Omega}\leqslant2\|u\|_{2,\Omega}^2\cdot\|u_x\|_{2,\Omega}^2\qquad(12)$$

其 $u(x)\in H_0^1(\Omega)$，$\Omega\subset R^2$ 中，且

$$\|u\|_{4,\Omega}\equiv(\int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x)^{\frac{1}{4}},|u|\equiv(\sum_{k=1}^2u_{x_k}^2)^{\frac{1}{2}},$$

而

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2\equiv(\int_\Omega|u_x|^2\mathrm{d}x\equiv\int_\Omega u_x^2\mathrm{d}x.$$

对于不等式(11)中的非线性项，

$$\left|\int_\Omega u_{tj}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_{ti}\mathrm{d}x\right|\leqslant\varphi\|u_t\|_{4,\Omega}^2\leqslant\sqrt{2}\psi\|u_t\|_{2,\Omega}\cdot\|u_{t,x}\|_{2,\Omega}\leqslant c_1F^2+c_2\varphi^2\psi^2\qquad(13)$$

因此，可得到以下的不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi^2+cF^2\leqslant c_1\varphi^2\psi^2+2\psi\|f_t\|_{2,\Omega}\qquad(14)$$

再利用估计(9)，可得到引理2的结论.

下面证明定理1.

证明 由引理1,2，当 $u$ 是方程组(1)的广义解时，存在不等式(9)和 $\int_0^t F^2(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant C_2$，由这些不等式得出积分 $\int_0^\infty\varphi^2(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^\infty F^2(t)\mathrm{d}t$ 的有限性，其中

$$\varphi^2(t)=\int_\Omega u_x^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

$$F^2(t)=\int_\Omega u_{tx}^2(x,t)\mathrm{d}x.$$

另一方面，有不等式

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^2\right|=2\left|\int_\Omega u_ju_{tj}\mathrm{d}x\right|\leqslant2\varphi F,$$

可以得到

$$\int_0^\infty\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^2\right|\mathrm{d}t<\infty\qquad(15)$$

从积分 $\int_0^\infty\varphi^2(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^\infty2\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^2\right|\mathrm{d}t$ 的有限性得出，当 $t\to+\infty$ 时，有 $\varphi^2\to0$. 由于不等式

$$\int_{\Omega_1}u^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant C_{\Omega_1}\varphi^2(t)$$

对于区域 $\Omega$ 中任意有界区域 $\Omega_1$ 成立. 因此得到

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\Omega_1}u^2(x,t)\mathrm{d}x=0$$

至此，证明了定理1.

## 参考文献：


[1] 陈文芳.非牛顿流体力学[M].北京:科学出版社，1984.

[2] 周美珂，胡秀吉.非牛顿粘性流体薄板流的数学模型[J].北京师范大学学报(自然科学版)，1998，34(1):6～12.

[3] SUN YINGFEI，FAN TIANYOU，ZHOU MEIKE. The existence of periodic solutions and behavior of the generalized solution when $t\to\infty$ of boundary problem of non-Newtonian fluids[J]. **Applied Mathematics and Computation**，2000，112(2-3):213～222.


(责任编辑:李春丽)

万方数据