

弦振动驻波实验的物理机制研讨

乔唤兴

(基础课部)

摘要 本文借助磁路定理, 非齐次泛定方程的定解和没有初始条件弦振动微分方程解, 较详细地研究了驻波实验的物理机制, 并探讨了一种结论, 当调节弦长为四分之一波长的奇数倍时, 形成一端为波腹另一端为波节的稳定驻波。实验证明, 该理论推导正确, 多次实验是稳定的。

主题词 激振函数; 格林函数法; 稳态强迫振动

19世纪末, 英国物理学家 J. C 麦克斯韦预言了电磁波的存在。德国科学家 H. R 赫兹借助于电磁驻波实验证实了电磁波存在这一预言。近来物理学工作者借助于波源——杆的横向振动方程, 测量出了固体材料在高温下的杨氏模量^[1]。因此讨论驻波实验中波源的激发, 波源的振动方程和驻波的形成条件, 对物理量的测量, 物理实验教学都有一定的意义。本文以弦振动为例来讨论驻波实验的物理全过程。

1 激振函数

要想形成稳定的驻波, 必须不断地提供能量, 要有一个所谓激振函数。如图 1 所示, Z 为电磁铁, 一般用频率 $f = 50$ 赫兹市电降压供能。设交流电流 $I = I_0 \cos \omega t$, 对图 1 所示虚

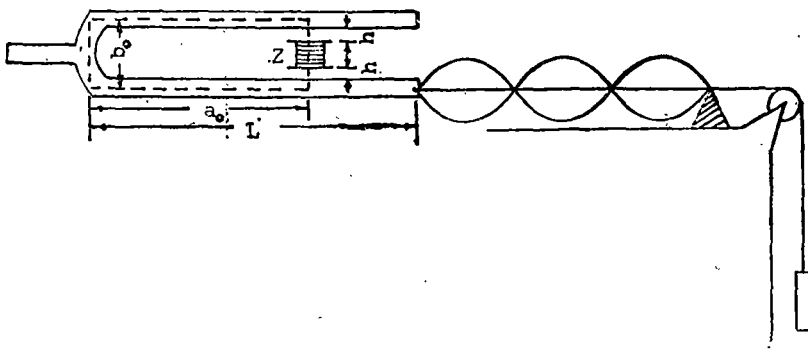


图 1 驻波实验示意图

线磁路, 由磁路定理可知, 磁阻:

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r S_0} \left[2h + \frac{2(a_0 b_0 - h)}{\mu_r} \right] = \frac{1}{\mu_0 \mu_r S_0} \left[2h \left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) + \frac{2(a_0 + b_0)}{\mu_r} \right],$$

本文 1989 年 5 月 18 日收到

$$\frac{dR_m}{dh} = \frac{2(1 - \frac{1}{\mu_r})}{\mu_0 s_0}$$

式中 s_0 为磁路截面积, h 为磁铁与音叉间隙; a_0 、 b_0 为虚线所示矩形磁路之边长

因磁能, $W_m = \frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{R_m}$, N 为电磁铁线圈匝数。作用在音叉上的力为^[4]:

$$F = -\frac{W_m}{R_m} \frac{dR_m}{dh} = -\frac{\frac{1}{2}(NI)^2 \frac{2(1 - \frac{1}{\mu_r})}{\mu_0 s_0}}{\frac{1}{\mu_0^2 s_0^2} \left[2h(1 - \frac{1}{\mu_r}) + \frac{2(a_0 + b_0)}{\mu_r} \right]^2}$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 I^2 s_0 (1 - \frac{1}{\mu_r})}{4 \left[h(1 - \frac{1}{\mu_r}) + \frac{(a_0 + b_0)}{\mu_r} \right]^2}$$

一般情况下 $\mu_r \gg 1$, 故可得

$$F \approx -\frac{\mu_0 N^2 I^2 s_0}{4 h^2} = -\frac{\mu_0 N^2 I^2 s_0}{4 h^2} \cos^2 \omega_0 t = -\frac{\mu_0 N^2 I_0^2 s_0}{4 h^2} \cdot \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2}$$

$$= -\frac{\mu_0 N^2 I_0^2 s_0}{8 h^2} (1 + \cos 2\omega_0 t) = -F_0 (1 + \cos \omega t)$$

其中 $F_0 = \frac{\mu_0 N^2 I_0^2 s_0}{8 h^2}$, $\omega = 2\omega_0 = 2 \cdot 2\pi f_0$

音叉振动频率为交流电频率 f_0 的 2 倍。这是由于音叉本身无永磁性, 当电磁铁在一周期内分别形成 N 极, S 极各一次时都要吸引音叉。第一项 F_0 是静态分量, 对振动过程没有贡献。所以下面讨论中, 激振函数我们记作: $F = F_0 \cos \omega t$ (1)

2 杆的横向受迫振动

由上述可知音叉的振动问题可简化为杆的横向受迫振动来讨论。杆在阻力与速度成正比的介质中运动, 设均匀杆矩形截面积为 S , 长为 L , 单位长度质量为 ρ , 单位长度杆所受之力为 $f(x, t)$, E 为其杨氏模量, J 是横截面对中性轴的惯性矩。并令

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho S}$$

假设杆在振动过程中, 轴线上任一点的位移均沿 y 轴方向, 如图 2。这种横向位移称挠度, 它是空间坐标 x 与时间 t 的函数, 用 $W(x, t)$ 表示。则其振动微分方程为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2b \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\rho} f(x, t) \quad (2)$$

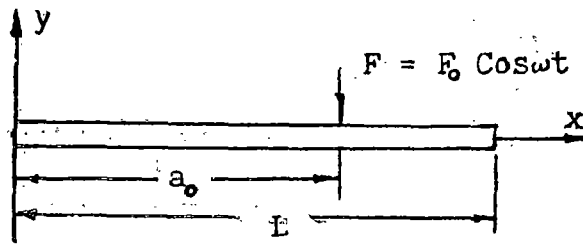


图2 杆的横向振动

一端固定，一端自由杆的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} W(x,t)|_{x=0} &= 0 \\ W_x|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} x=0 \text{ 固定端}$$

$$\left. \begin{aligned} W_{xx}|_{x=L} &= 0 \\ W_{xxx}|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \right\} x=L \text{ 自由端}$$

初始条件，设杆原来是静止的，则 $W|_{t=0} = 0, W_t|_{t=0} = 0$ 。 $f(x,t) = F_0 \cos \omega t \cdot \delta(x - a_0)$ ， $F_0 \cos \omega t$ 是集中力，作用在离固定端为 a_0 的点上，如图2。所以原方程可写成

$$W_{tt} + a^2 W_{xxxx} + 2bW_t = \frac{1}{\rho} F_0 \cos \omega t \cdot \delta(x - a_0) \quad (3)$$

这是出现对坐标四阶微商的非齐次泛定方程的定解问题。我们用格林函数法解这个方程及其定解条件。方程(3)相应的格林函数方程如下：

$$\left. \begin{aligned} G_{tt} + a^2 G_{xxxx} + 2bG_t &= 0 \\ G|_{x=0} = 0, G_x|_{x=0} = 0; G_{xx}|_{x=L} = 0, G_{xxx}|_{x=L} = 0 \\ G|_{t=\tau} = 0, G_t|_{t=\tau} &= \delta(x - \xi) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

用分离变量法求解，令 $G = X(x)T(t)$ ，代入方程(4)可得：

$$\left. \begin{aligned} X'''' - K^4 X &= 0 \\ X|_{x=0} = 0, X'|_{x=0} &= 0 \\ X''|_{x=L} = 0, X'''|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\ddot{T} + 2b\dot{T} + a^2 k^4 T = 0 \quad (6)$$

方程(5)及边界条件之解为[2]

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \text{chk}_i x - \text{cosk}_i x - \alpha_i (\text{shk}_i x - \text{sink}_i x) \\ \alpha_i &= \frac{\text{chk}_i L + \text{cosk}_i L}{\text{shk}_i L + \text{sink}_i L} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中

$$\text{cosk}_i L \text{chk}_i L = -1 \quad \text{解出: } k_1 L = 1.875, \quad k_2 L = 4.604, \quad k_3 L = 7.854$$

$$k_i L \approx \frac{\pi}{2} (2i - 1) \quad (i > 3)$$

方程(6)的特征方程为 $r^2 + 2br + a^2 k^4 = 0$ ，其特征根：

$r_{1,2} = -b \pm i\sqrt{b^2 - a^2 k^4}$ 。抛弃 $b^2 \geq a^2 k^4$ 时所得的非振动形式之解。当 $b^2 < a^2 k^4$ 时

$r_{1,2} = -b \pm i\sqrt{a^2 k^4 - b^2} = -b \pm ip_i$ ， $p_i = \sqrt{a^2 k^4 - b^2}$ 。方程(6)的通解(注意初始时刻 $t = \tau + 0$)为：

$$T_i(t, \tau) = e^{-b(t-\tau)} [A_i \cos P_i(t-\tau) + B_i \sin P_i(t-\tau)] \quad (8)$$

所以,
$$G = \sum_{i=1}^{\infty} X_i T_i = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-b(t-\tau)} [A_i \cos P_i(t-\tau) + B_i \sin P_i(t-\tau)] X_i$$

由初始条件 $t = \tau$, $G = 0$, 知 $A_i = 0$

$$t = \tau, \quad G_i = \delta(x - \xi), \quad \text{即} \sum_{i=1}^{\infty} B_i P_i X_i = \delta(x - \xi)$$

由本征函数 X_i 的正交性可得: $B_i P_i = \int_0^L \delta(x - \xi) X dx = X_i \xi$, 故

$$B_i = \frac{1}{P_i} X_{i\xi} \quad (X_{i\xi} \text{表示} x = \xi \text{处的} X_i)$$

所以,

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-b(t-\tau)}}{P_i} X_{i\xi} \sin P_i(t-\tau) \cdot X_i \quad (9)$$

故原方程(3)之解为:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \int_0^t \left\{ \int_0^L \frac{F_0}{\rho} \cos \omega \tau \cdot \delta(\xi - a_0) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-b(t-\tau)}}{P_i} X_{i\xi} \sin P_i(t-\tau) X_i d\xi \right\} d\tau \\ &= \int_0^t \frac{F_0}{\rho} \cos \omega \tau \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-b(t-\tau)}}{P_i} X_{i a_0} \sin P_i(t-\tau) X_i d\tau \\ &= \frac{F_0}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{i a_0} X_i}{P_i} e^{-bt} \int_0^t e^{b\tau} [\cos \omega \tau \cos P_i \tau \sin P_i t - \cos \omega \tau \sin P_i \tau \cos P_i t] d\tau \\ &= \frac{\omega F_0}{\rho(1+b)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{i a_0} X_i}{P_i(\omega^2 - P_i^2)} (\cos \omega t - e^{-bt} \cos P_i t) \end{aligned} \quad (10)$$

当 $\omega = P_i$ 时发生共振, 就是说不会有稳恒规律, 振幅将自某时刻起而无限制地增大, 但有摩擦时稳恒规律对任意的 ω 都可能。方程(10)中第一项为稳态强迫振动

$$W = \frac{\omega F_0}{\rho(1+b)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{i a_0} X_i}{P_i(\omega^2 - P_i^2)} \cos \omega t$$

自由端处的振动为

$$W = \frac{\omega F_0}{\rho(1+b)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{i a_0} X_i L}{P_i(\omega^2 - P_i^2)} \cos \omega t \quad (11)$$

说明自由端处强迫振动为与强迫力同频率的谐振动。弦振动波源。可进一步改写为

$$U = W = A \cos \omega t \quad (12)$$

式中

$$A = \frac{\omega F_0}{\rho(1+b)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i a_0 X_i L}{P_i(\omega^2 - P_i^2)}$$

方程(10)第二项

$$\frac{\omega F_0}{\rho(1+b)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{i0} X_i}{P_i(\omega^2 - P_i^2)} e^{-bt} \cos P_i t$$

实验测得 b 的平均值为 0.544 s^{-1} ，由于阻尼作用，经 5 s 时这项运动的振幅就衰减去 93.42% ，因而该项运动很快消失，稳定后，振动还是按方程(12)所示方式振动。

3 驻波的形成

弦线两头分别固定于音叉末端及三棱柱体上，如图3所示，将音叉末端即波源所在处取作坐标原点，则可列出具体的方程：

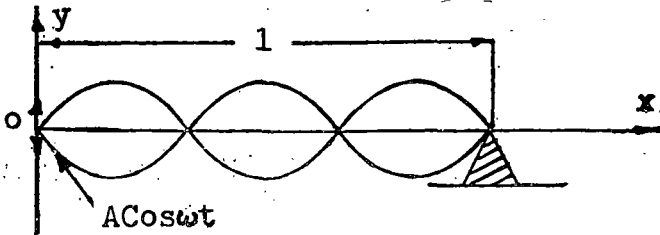


图3 驻波示意图

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} - 2du_t \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} &= A \cos \omega t, \quad u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} &= \varphi_1(x), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由于每一个实在物理体系中总存在着摩擦，初始值的影响逐渐地减弱。这样，我们自然得到没有初始条件的问题，方程(13)可简化为：

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} - 2du_t \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} &= A \cos \omega t, \quad u|_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

方程右边的 $2du_t$ 项为对应于一个与速度成正比例的摩擦力。若波速 c 以 cm/s 计，则实验测量 $d = 30.52 \text{ s}^{-1}$ 。今考虑关于周期边界规律的传播问题。为方便起见把边界条件写作复数形式。 $u|_{x=0} = \text{Re}[Ae^{i\omega t}]$ ，设 $u(x, t) = \text{Re}[X(x)e^{i\omega t}]$ 代回方程(14)中，并考虑边界条件，可得：

$$u(x, t) = \text{Re}\left[A\left(\cos \mu x - \frac{\cos \mu l}{\sin \mu l} \sin \mu x\right)e^{i\omega t}\right] \quad (15)$$

式中

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{2d\omega}{c^2}} \alpha + i\beta \quad 1)$$

考虑到 $\frac{d}{\omega} = \frac{30.52}{628} \approx \frac{1}{210} \ll 1$ ，忽略 $\frac{d}{\omega}$ 平方以上各项可得：

$$\alpha = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \beta = -\frac{d}{c} \quad (17)$$

3.1 零级近似

实验测得 $c = 6600 \text{ cm/s}$, 则

$$\beta = \left| -\frac{d}{c} \right| = \frac{30.52}{6600} \approx \frac{1}{220} \ll 1, \text{ 所以}$$

$$\mu = \alpha + i\beta = \alpha = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ 代入(15)式, 得}$$

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= A \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} x - c \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos \omega t \\ &= c \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta \right) \cos \omega t = \bar{A} \cos \omega t \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + A^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi l}{\lambda}} = A \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi l}{\lambda}} \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} \end{aligned}$$

显然(18)式表示振幅随 x 周期变化, 圆频率为 ω 的驻波方程。实验中调节 l 长度使 $c = 0$ 时振幅最小, 形成明显的波节、波腹。

$$C = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi l}{\lambda}} = 0 \quad \text{即} \quad \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = \pm i$$

或

$$\frac{\cos \frac{2\pi l}{\lambda}}{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}} = \frac{\cos n\pi + i \sin n\pi}{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} + i \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}$$

令分子分母实部相等, 则有

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} &= \cos n\pi \\ \sin \frac{2\pi l}{\lambda} &= \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

由这两个等式均可得到:

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 1, \dots) \quad (19)$$

说明调节弦长为半波长的某一整数倍时形成驻波。这时,

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi \cdot n}{\lambda} = \operatorname{ctg} n\pi = \infty \text{ 所以}$$

$$\theta = (2m_0 + 1) \frac{\pi}{2} \quad (m_0 = 0, 1, 2, \dots)$$

形成波节时,

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta\right) = \cos\left[\frac{2\pi x}{\lambda} + (2m_0 + 1)\frac{\pi}{2}\right] = 0, \text{ 则知}$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + (2m_0 + 1)\frac{\pi}{2} = (2m + 1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

所以

$$x = (m - m_0)\frac{\lambda}{2} = n\frac{\lambda}{2} \quad (20)$$

取值总取 $m > m_0$ 方有物理意义, 故用 n 代替这一整数。说明波节总出现在半波长整数倍处。

$$\text{若 } \cos\left[\frac{2\pi x}{\lambda} + (2m_0 + 1)\frac{\pi}{2}\right] = \pm 1 \text{ 则 } \frac{2\pi x}{\lambda} + (2m_0 + 1)\frac{\pi}{2} = m\pi$$

$$\text{可得 } x = [2(m - m_0) - 1]\frac{\lambda}{4} = (2n - 1)\frac{\lambda}{4} \quad (21)$$

即波腹总出现在 $\lambda/4$ 的奇数倍处。这些与实验结果是一致的。注意当 $l = n\lambda/2$ 代入 C 的表达式中时 $C = \infty$, 在数学上是没有意义的, 其物理原因是忽略了 α 、 β 的一级无穷小量, 忽略了阻尼作用所致。注意振幅

$$\bar{A} = C \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta\right), \text{ 在波节时因子 } \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta\right) = 0$$

故 \bar{A} 仍等于零。

3.2 一级近似解

$$\mu = \alpha + i\beta = \frac{\omega}{c} \left(1 - i \frac{d}{\omega}\right), \text{ 在此情况之下, 因:}$$

$$\cos \mu x = \cos \alpha x \cos i\beta x - \sin \alpha x \sin i\beta x = \cos \alpha x \operatorname{ch} \beta x - i \sin \alpha x \operatorname{sh} \beta x \quad (22)$$

$$\sin \mu x = \sin \alpha x \cos i\beta x + \cos \alpha x \sin i\beta x = \sin \alpha x \operatorname{ch} \beta x + i \cos \alpha x \operatorname{sh} \beta x \quad (23)$$

$$\frac{\cos \mu l}{\sin \mu l} = \frac{\cos \alpha l \operatorname{ch} \beta l - i \sin \alpha l \operatorname{sh} \beta l}{\sin \alpha l \operatorname{ch} \beta l + i \cos \alpha l \operatorname{sh} \beta l} = \gamma + i\delta \quad (24)$$

将(22)、(23)、(24)代入(15)式, 经整理可得

$$u(x, t) = A[(\cos \alpha x \operatorname{ch} \beta x - \gamma \sin \alpha x \operatorname{ch} \beta x + \delta \cos \alpha x \operatorname{sh} \beta x) \cos \omega t + (\sin \alpha x \operatorname{sh} \beta x + \gamma \cos \alpha x \operatorname{sh} \beta x + \delta \sin \alpha x \operatorname{ch} \beta x) \sin \omega t] \quad (25)$$

对于一级近似:

$$\operatorname{sh} \beta x = \beta x + \frac{(\beta x)^3}{3!} + \dots \approx \beta x$$

$$\operatorname{ch} \beta x = 1 + \frac{(\beta x)^2}{2!} + \dots \approx 1$$

$$\text{代入(25)式则得: } u(x, t) = A[(\cos \alpha x - \gamma \sin \alpha x + \delta \beta x \cos \alpha x) \cos \omega t + [\beta x \sin \alpha x + \gamma \beta x \cos \alpha x + \delta \sin \alpha x] \sin \omega t] \quad (26)$$

实验中调节弦长 l , 使 $\cos \alpha l = 1$, 则 $\sin \alpha l = 0$ 这时由(24)式知 $\gamma = 0$, $\delta = 1/\beta l$, 代入(26)式则得

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= A\left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos \alpha x \cos \omega t + A\left(\beta x - \frac{1}{\beta l}\right) \sin \alpha x \sin \omega t \\ &= c_1 \cos(\omega t - \theta_1) \end{aligned} \quad (27)$$

式中

$$C_1 = A \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha x + \left(\beta x - \frac{1}{\beta l}\right)^2 \sin^2 \alpha x}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\left(\beta x - \frac{1}{\beta l}\right) \operatorname{tg} \alpha x}{\left(1 - \frac{x}{l}\right)}$$

$$\text{因 } \sin \alpha l = 0 \quad \text{则 } \alpha l = n\pi \quad \text{所以 } l = \frac{n\pi}{\alpha} = n \frac{\lambda}{2} \quad (28)$$

若 $C_1 = 0$

$$\text{即 } C_1 = A \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha x + \left(\beta x - \frac{1}{\beta l}\right)^2 \sin^2 \alpha x}$$

或

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha x &= 0 \\ 1 - \frac{x}{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ 均可得出: } x = n\lambda/2 \quad (29)$$

说明一级近似条件下波节也出现在半波长的整数倍处。又因

$$\begin{aligned} c_1 &= A \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \cos^2 \alpha x + \left(\beta x - \frac{1}{\beta l}\right)^2 \sin^2 \alpha x} \\ &= A \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\beta x - \frac{1}{\beta l}\right)^2 + \frac{1}{2l^2} (l^2 + x^2 - \frac{1}{\beta^2}) \cos 2\alpha x} \end{aligned}$$

振幅周期性大小变化决定于 $\cos 2\alpha x$, 注意 $\beta \ll 1$, 要保证根式内第三项为正, 则必须满足, $2\alpha x = (2n+1)\pi$ 所以得

$$x = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad (30)$$

说明波腹出现在 $\lambda/4$ 波长的奇数倍处。注意这时振幅:

$$\left| C_1 \right| = \left| A \left(\beta \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{\beta l} \right) \right| \quad \text{实验中测 } A = 0.25 \text{ cm, } \beta = \frac{30.52}{6600} \text{ cm}^{-1}, \quad l = 66 \text{ cm,}$$

$\lambda = 66 \text{ cm}$, 则 $|C_1| = 0.8 \text{ cm}$, 实验可以清楚地看到宽 1.6 cm 的波腹出现。

若调节弦长使 $\cos \alpha L = 0$, 则, $\sin \alpha L = \pm 1$, 由(24)式知 $\gamma = 0$, $\delta = \beta l$, 代入(26)式, 这时

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= A(\cos \alpha x - \beta^2 l x \cos \alpha x) \cos \omega t + A(\beta x \sin \alpha x - \beta l \sin \alpha x) \sin \omega t \\ &= A(1 - \beta^2 l x) \cos \alpha x \cos \omega t + A(\beta x - \beta l) \sin \alpha x \sin \omega t \\ &= C_2 \cos(\omega t - \theta_2) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{式中 } C_2 = A\sqrt{(1-\beta^2lx)^2\cos^2\alpha x + \beta^2(x-l)^2\sin^2\alpha x}$$

$$\text{tg}\theta_2 = \frac{(\beta x - \beta l)}{(1-\beta^2lx)} \text{tg}\alpha x$$

$$\text{因 } \cos\alpha l = 0, \text{ 知 } \alpha l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{所以 } l = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= A\sqrt{(1-\beta^2lx)^2\cos^2\alpha x + \beta^2(x-l)^2\sin^2\alpha x} \\ &= A\sqrt{\{(1-\beta^2lx)^2 + \beta^2(x-l)^2 + [(1-\beta^2lx)^2 - \beta^2(x-l)^2]\cos^2\alpha x\} / 2} \\ &= A\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha x}{2}} = A\cos\alpha x \quad (\text{略去}\beta^2\text{项}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{当 } \cos\alpha x = 0 \text{ 时, } \alpha x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (34)$$

$$\text{若 } \cos\alpha x = \pm 1 \text{ 时, } \alpha x = n\pi, \text{ 所以 } x = n\frac{\lambda}{2} \quad (35)$$

(32)、(34)、(35)三式说明调节弦长为 $\lambda/4$ 的奇数倍时, 波节总是出现在 x 等于 $\lambda/4$ 奇数倍位置, 波腹总出现在 $\lambda/2$ 整数倍位置上。如图 4 所示, 这时振幅 $C_2 = A = 0.25\text{cm}$ 。清楚地说明了 $x=0$ 端是以 A 为振幅的谐振动。而三棱柱处 $x=l$ 点则为波节。三棱柱相对弦来说为波密介质, 反射时有半波损失, 因而出现波节这是可以预料的。

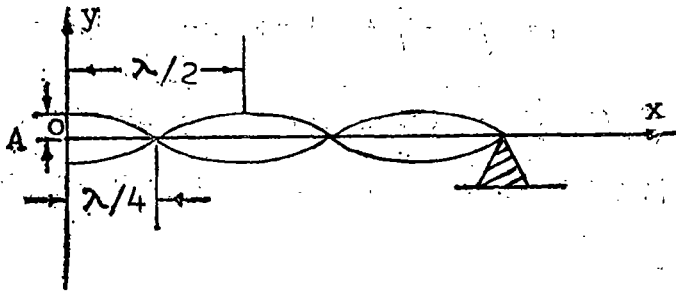


图 4 波节、波腹、振幅示意图

同样音叉与弦接触处也应出现波节。这是否与本节结论矛盾呢? 否, 实际情况是在 $x=0$ 处, 前面讨论过的波节依附在音叉端点上又随音叉以较小振幅 A 作谐振动。

4 结束语

本文导出了激振频率为市电频率的 2 倍, 即 $\omega = 2\omega_0$ 。解出了音叉自由端的稳态强迫振动方程: $u = A\cos\omega t$ 。讨论了形成驻波的条件: $l = n\lambda/2$ 或 $l = (2n+1)\lambda/4$, 应强调指出的是后一种形成稳定驻波的条件往往不被人们重视, 所以本文也作了实验讨论。

弦振动驻波实验, 就一般操作来讲十分简单, 而用数学表示出来却相当复杂。我们之所以不厌其烦地进行数学推导是因为通过数学表达式可以找出各物理量之间微妙的函数关系,

描述物理现象本质，从而着手定量的测量研究。例如本文(32)、(34)、(35)式导出的有趣结论 实验数据如下：音叉长 $L=23\text{cm}$ ，弦线张力 $f=1.566\text{N}$ ，弦线密度 $\mu=3.556\times 10^{-4}\text{kg/m}$ ，实验测量波长 $\lambda=66\text{cm}$ ，计算可得波速 $v=v\lambda=6600\text{cm/s}$ 或者

$$v = \sqrt{\frac{f}{\mu}} \approx 6600\text{cm/s}$$

其它实验数据如下表：

弦长(cm)	波节、波腹、振幅	波节(cm)	波腹(cm)	振幅(cm)
49.5		16.5 49.5	0 33	0.25
66		0 33 66	16.5 49.5	0.80
82.5		16.5 49.5 82.5	0 33 66	0.25

该数据验证了这一推导的正确性。它启示我们借此数据去探讨其他相关的物理量测量。当调节弦长为其他数值时，驻波的物理特性可以进一步研讨。

参 考 文 献

1. 潘人培. 固体材料在高温下的杨氏模量的测定. 大学物理, 1984; 4: 29—31转47
2. A. H. 吉洪诺夫, A. A. 萨马尔斯基. 数学物理方程. 高等教育出版社, 1957: 107—112, 147—151
3. 梁昆彦. 数学物理方法. 人民教育出版社, 1961: 215—218, 222—225
4. Davies J B, Radley D E. Electromagnetic Theory 1: 172~174
5. 王守忠. 振动理论习题详解. 天津科学技术出版社, 317—345

A Study on the Experiment of String Standing Wave in Physics

Qiao Huanxing

(Dept. of Fund. Course)

ABSTRACT In this paper, the detailed properties of standing wave experiment in physics are dealt with by the theorem of magnetic circuits, the solution of non-homogeneous functional equation and the solution of differential equation without initial value in string oscillation. Meanwhile it is correct that a conclusion, a stable standing wave with one end of antinode and the other end of node, is investigated when the length of the string equals to odd multiple of $\lambda/4$, and experiments have proved that it is stable.

Subjectwords exciter function; method of Green's function; forced stable oscillation